المحاسبة الإدارية ونماذج بحوث العمليات
فى إتخاذ القرارات

دكتور
اسماعيل ابراهيم جمعة
كلية التجارة جامعة الاسكندرية

دكتورة
زينات محمد محرم
كلية التجارة - جامعة الاسكندرية

دكتور
صبحي محمود الخطيب
كلية التجارة جامعة الاسكندرية

٦٥٤٣
٦٥٤٣
٦٥٤٣

الفهرسة أثناء النشر في المصرية
المكتب المصري لضبط البيانات
الرقم العام: ٣٦٠١
الرقم الخاص: ٦٥٤٣/٢٠٠٠

لا يعار

٢٠٠٠/

الدار الجامعية
طبع - نشر - توزيع
الإدارة ٨٤ شارع زكريا غنيم - الإسكندرية
تليفون: ٥٩٦٧٨٨٢
بريدية ص ب ٣٠ الإبراهيمية - رمل الإسكندرية

الفصل السابع
نموذج البرمجة الخطية

الفصل السابع
نموذج البرمجة الخطية

يمكن تعريف البرمجة الخطية بصفة عامة بأنها أسلوب رياضى يمكن من الحصول على أفضل حل للمشاكل التى يكون لها عدة حلول ممكنة بديلة. وتستخدم البرمجة الخطية عادة للمساعدة فى حل المشاكل التى تتضمن توزيع الموارد المحدودة على الأنشطة المختلفة التى تتنافس على إستخدام هذه الموارد. وتستخدم البرمجة الخطية نماذج رياضية لوصف المشكلة المراد حلها.

ويعنى لفظ « الخطية» Linear ضرورة أن تكون جميع الدوال التى يتضمنها النموذج خطية. ولاتعنى لفظة « البرمجة» Programming ماقد يتبادر إلى الذهن عن برامج الحاسبات الاكترونية. وإنما تستخدم فى هذا المجال كمرادف للفظ «التخطيط» Planning. أى أن البرمجة الخطية تتضمن تخطيط الأنشطة بما يحقق أفضل نتائج ممكنة.

ويعتبر نموذج البرمجة الخطية أحد نماذج المثالية والتى تستخدم التعبير الرياضى لوصف مشاكل ذات خصائص معينة بغرض تحديد قيم متغيرات القرار التى تحقق أفضل حل ممكن (وهو ما يطلق عليه الحل الأمثل). وهو يعتبر فى نفس الوقت من النماذج التحديدية لما يتضمنه من إفتراض المعرفة الكاملة بمعاملات النموذج.

١- متطلبات تطبيق نموذج البرمجة الخطية:

ذكرنا فيما سبق أنه عند إستخدام البرمجة الخطية فى مجال الأعمال. فأننا ننظر اليها بإعتبارها أسلوب رياضى لتوزيع موارد محدودة على عدد من الاستخدامات البديلة بالطريقة التى تحقق أفضل إستخدام ممكن لها. وهذا يعنى أن البرمجة الخطية تستند على فكرتين أساسيتين وهما فكرة النشاط وفكرة

البدائل ويقصد بفكرة «النشاط» activity فى مجال الأعمال تلك الطريقة التى يمكن أن يتم بها أداء عمل معين، وقد يعبر النشاط عن منتج معين أو عملية معينة. ويعتبر كل نشاط مستقل عن غيره من الأنشطة ويقصد بفكرة «البدائل» alternatives فى هذا الصدد كيفية تحقيق الهدف المعين. وتستخدم البرمجة الخطية لتحديد أي البدائل يجب اتباعه لتحقيق الهدف.

ويتطلب إعداد نموذج البرمجة الخطية ضرورة توافر مواصفات معينة فى المشكلة المراد حلها. وتتمثل هذه المواصفات فى الآتى:

١- ضرورة وجود هدف واحد يراد تحقيقه. وقد يكون هذا الهدف هو تحقيق أقصى ربح ممكن أو أقصى قيمة ممكنه. ويجب أن يكون هذا الهدف واضحاً ودقيقاً.

٢- أن تتضمن المشكلة عدد من متغيرات القرار والتى يؤدى إختيار القيمة المثلى لكل منها إلى تحقيق الهدف المراد تحقيقه، وقد تكون هذه المتغيرات وحدات منتجات أو مناطق توزيع أو أنشطة مختلفة تقوم بها المنشأة.

٣- أن تكون هناك قيود تحد من القدرة على تحقيق الهدف المرغوب وقد تكون هذه القيود معبره عن الموارد المحدودة المتاحة للوحدة الاقتصادية. كما قد تكون قيوداً تتعلق بطبيعة النشاط والبيئة المحيطة به. أى أن متخذ القرار ليس مطلق اليدين فى اختياره لقيم متغيرات القرار التى تحقق الهدف المرغوب.

٤- ضرورة أن تكون جميع متغيرات القرار مستمرة Continuous، أى إنه يمكن لمتغيرات القرار إتخاذ أى قيم كسرية وليست بالضروره قيم صحيحة.

٥- ضرورة وجود علاقة خطية بين المتغيرات التى تتضمنها المشكلة.

٦- ضرورة توافر البيانات اللازمة لإعداد النموذج وأن تكون هذه البيانات معلومة بصفة مؤكدة.

وترجع ضرورة توافر هذه الخصائص إلى طبيعة نموذج البرمجة الخطية والإفتراضات التى يقوم عليها. وتتمثل إفتراضات نموذج البرمجة الخطية فى ثلاثة وهى : الخطية، والقابلية للتجزئة، والتأكد التام. ونتناول فيما يلى كل من هذه الإفتراضات بشىء من التفصيل.

١-١- إفتراض الخطية : Linearity

يقصد بالخطية وجود علاقات ذات نسب ثابتة بين المتغيرات التى تتضمنها المشكلة. ويعتبر افتراض الخطية هو الإفتراض الأساس للبرمجة الخطية. ذلك أنه يفترض أن تكون العلاقات بين المتغيرات علاقة خطية كشرط أساسى لإعداد نموذج للبرمجة الخطية.

وتتحقق الخطية فى العلاقة المعينة إذا توافر شرطان أساسيان وهما شرط التناسب، وشرط القابلية للإضافة. ويتعلق « شرط التناسب » Proportionality بتأثير كل نشاط من الأنشطة التى يعبر عنها النموذج على قيمة الدالة المعبرة عن العلاقة المعينة. ولنأخذ على سبيل المثال حالة الرغبة فى تحقيق أقصى ربح ممكن بإنتاج تشكيلة من المنتجات. ويفرض أن إدارة الوحدة الاقتصادية قررت إنتاج منتج واحد فقط، ولنعبر عنه بالمنتج و والذى يبلغ ربح الوحدة منه ع و والكمية المنتجة منه هى س و فى هذه الحال يكون ربح الوحدة $\pi = ع_و \cdot س_و$ ويفترض عادة أن ع و هى قيم ثابتة لاتتغير بتغير حجم النشاط .

وبالتالى فإن زيادة الوحدات المنتجة من المنتج و بوحدة واحدة يؤدى الى زيادة قيمة π . بمقدار ع و. كذلك إذا إفترضنا أن كل وحدة من المنتج و تتطلب لإنتاجها كمية قدرها أ ر و من المورد ر. فى هذه الحالة تكون الكمية المستخدمة من المورد و هى أ ر و س و وتزداد الكمية المستخدمة من المورد بمقدار أ ر و نتيجة زيادة إنتاج المنتج و بوحدة واحدة.

ولايعتبر إفتراض التناسب كافيا لضمان أن تكون العلاقة خطية، إذ أنه قد يؤدى إشتراك عدد من الأنشطة أو المنتجات فى استخدام مورد معين إلى وجود تداخل بين الأنشطة أو المنتجات. وقد يؤثر وجود هذا التداخل على خطية العلاقات بين المتغيرات. لذلك يتضمن إفتراض الخطية أيضا ضروره إفتراض عدم وجود أى تداخل بين الأنشطة أو المنتجات. ويطلق على هذا الإفتراض الأخير «القابلية للاضافة» ، ويقضى هذا الافتراض بأنه إذا كانت لدينا مستويات للأنشطة (س ١، س ٢، ..... ، س ن) فإن إجمالى الكمية المستخدمة من كل مورد والقيمة الناتجة للهدف يكون مساوياً لمجموع الكميات التى تتحدد بأداء كل نشاط بصفة مستقلة.

وعلى الرغم من أن الخطية هى إفتراض ضرورى لإعداد نموذج البرمجة الخطية، إلا أن الواقع العملى يتضمن قله من المشاكل التى يتوافر فيها الإفتراض. وتواجه الإدارة كثيراً بمشاكل تتضمن علاقات غير خطية بين المتغيرات. وتلجأ الإدارة عادة الى إستخدام إحدى طرق التقريب المعروفه لتحويل العلاقات غير الخطية الى علاقات خطية بحيث يمكن تناول المشكلة باستخدام البرمجة الخطية.

ويجب أن نتوخى الدقة عند تطبيق طريقة معينه للتقريب بحيث لا تضير عملية التقريب بصلاحية النموذج.

١-٢- إفتراض القابلية للتجزئة : Divisibility

يعنى إفتراض القابلية للتجزئة أن مستويات النشاط تتيح لمتغيرات القرار أن تتخذ قيما كسرية (غير صحيحة). أى أنه يمكن عدم التقيد بأن تكون قيم المتغيرات أرقاماً صحيحة. وقد يكون لمتغيرات القرار دلالة من الناحية المادية إذا كانت فقط على هيئة أعداد صحيحة كما هو الحال إنتاج آلات إذ لا يعقل أن يكون الحل الأمثل هو إنتاج ٥ر١٠ آلة ، أو إنتاج ٧٥ر٤٠٠ سيارة مثلاً.

ويمكن إستخدام البرمجة الخطية أيضاً فى حالة إشتراط عدم القابلية للتجزئة. فإذا كان الحل متضمناً لأرقام كسرية فإنه يمكن تقريبها إلى أقرب أعداد صحيحة. كما فى حالة تقريب إنتاج الآلات إلى ١٠٠ آلات، أو تقريب إنتاج السيارات ليكون ٤٠٠ سيارة مثلاً. إلا أن هناك بعض المشاكل التى قد تترتب على إستخدام هذا المدخل خصوصاً إذا كانت متغيرات القرار متعددة وصغيرة الحجم. ويفضل فى هذه الحالة إستخدام برمجة الأعداد الصحيحة Integer Programming وهى حالة خاصة من البرمجة الخطية.

١-٣- افتراض التأكد التام : Complete certainty

يعتبر نموذج البرمجة الخطية أحد النماذج التحديدية والتى تفترض حالة التأكد التام. ويعنى إفتراض التأكد التام أن يكون متخذ القرار على درجة كاملة من التأكد بالنسبة للعوامل المسببة للقرار من ناحية، وبالنسبة للنتائج التى تترتب على إتخاذ مثل هذا القرار من ناحية أخرى. وبإستخدام الرموز التى سبق التعريف بها فإنه يفترض أن يكون لدى متخذ القرار علم كامل بجميع المعاملات التى يتضمنها النموذج وهى المعبرة عن ربح الوحدة من كل منتج ع و ، وإحتياجات وحدة المنتج من كل مورد ر ، أ ر و والكمية المتاحة من كل مورد ب ر.

ويفرض أيضاً أن تكون هذه المعاملات ذات قيمة ثابتة.

وحيث أن الواقع العملى نادراً مايتوافر فيه حالة التأكد التام، فإنه يفضل دائماً إجراء نوع من تحليل الحساسية Senstivity analysis بعد تحديد قيمة الحل الأمثل ويتضمن هذا التحليل دراسة التغير الذى قد يطرأ على الحل الأمثل نتيجة تغيير أحد أو بعض المعاملات التى إستخدمت فى تحديد الحل.

ولقد كان فرض التأكد التام عائقاً لاتساع نطاق تطبيق البرمجة الخطية إلى أن تمكن جورج دانتزج من التوصل إلى بعض الأساليب الرياضية التى تمكن

من حل مشاكل البرمجة فى ظل اعتبارات عدم التأكد. وأطلق على هذا النوع من البرمجة البرمجة الإحتمالية Stochastic Programming. وتتطلب دراسة هذا الأسلوب معرفة للأساليب الرياضة والإحصائية المتقدمة لذلك لن نتناوله فى هذا المؤلف.

٢- أركان نموذج البرمجة الخطية :

نخلص من العرض السابق إلى نموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن تعبير رياضى لمشكلة تتضمن عدد من المتغيرات، ويهدف النموذج إلى تحديد القيمة المثالية لكل من هذه المتغيرات بما يحقق أقصى (أو أدنى) قيمة لدالة خطية محددة بمجموعة من القيود الخطية فى ظل افتراضات معينة. وعلى هذا فإن الأركان الأساسية لأى نموذج رياضى يعبر عن احدى مشاكل البرمجة الخطية تتضمن المتغيرات، ودالة الهدف، والقيود المفروضة على تحقيق الهدف.

وقد سبق أن أوضحنا فى الفصل السابق أن متغيرات القرار هى تلك الكميات التى يمكن لمتخذ القرار التحكم فى تحديدها. وتعبر هذه المتغيرات عادة عن عدد وحدات المنتجات التى يراد انتاجها، أو كمية المنتجات التى يراد نقلها من مكان لآخر ، أو الإنفاق على الاعلان فى وسائل الأعلان المختلفة ، وما الى ذلك.

وتعبر دالة الهدف Objective function عن المعيار الذى يستخدمه متخذ القرار لتقييم القيم المختلفة للمتغيرات. ويكون الهدف عادة أما تحديد أقصى قيمة لدالة الهدف (كما فى حالة أقصى ربح) أو أدنى قيمة لها (كما فى حالة تدنية التكلفة). وتعبر قيم المتغيرات التى تحقق أفضل قيمة لدالة الهدف عن « الحل الأمثل ».

وتمثل القيود Constraints العلاقات الخطية التى تعبر عن استخدام الموارد المتاحة وأى قيود أخرى تكون ملائمة للمشكلة. ويمكن أن نميز بين كل من

القيود الموضوعية والقيود الطبيعية. وتعبر القيود الموضوعية عن تلك القيود المعبرة عن الفن الإنتاجي أو طبيعة النشاط أو البيئة المحيطة بالقرار.

- ويمكن أن نميز فى القيود الموضوعية بين تلك القيود التى تعبر عن كمية لايجب تجاوزها وتلك التى تعبر عن حد أدنى لكمية معينة يجب تحقيقها. ويعبر النوع الأول من القيود الموضوعية عن حدود restrictions لما يمكن استخدامه من مورد معين. ومثال ذلك قيود الطاقة الإنتاجية التى يعبر عنها بعدد محدود من الساعات المتاحة لتشغيل الآلات أو ساعات العمل المباشر المتاحة، والقيود المتعلقة بالكمية المحدودة من المواد الأولية، والقيود المتعلقة بالمساحة المحدودة للتخزين، وقيود استيعاب السوق للمنتجات. ويعبر عن هذه القيود عادة بعلامة (≤). أى أن الكمية المستخدمة من أى من هذه الموارد يجب أن تكون أقل من أو مساوية للكمية المتاحة.

ويعبر النوع الثانى من القيود الموضوعية عن مطلب requirement معين لمواصفات متغير القرار. ومثال ذلك حالة إنتاج منتجات تركيبية تتضمن نسباً لايجب أن تقل عنها من المواد المختلفة، ولعل أبرز الأمثلة على مثل هذه القيود تلك التى تظهر فى مشكلة الغذاء Diet problem والى عالجها سارجنت Sar-gent فى عام ١٩٤٥ والتى تضمنت تحديد الغذاء الذى يحقق أقل تكلفة ممكنة ويحتوى فى نفس الوقت على حد أدنى من العناصر الغذائية الممثلة فى الفيتامينات والسعرات الحرارية. ويعبر عن هذه القيود عادة بعلامة (≤) .

- وتتمثل القيود الطبيعية (أو المنطقية) فى تلك القيود التى تتفق مع المنطق الإقتصادى والذى يتضمن عدم امكانية انتاج أى من المنتجات بكمية سالبة ويطلق على مثل هذا القيد عادة شرط عدم السالبية non - negativity condi-tion . ويتم التعبير عن هذا الشرط دائماً بالتعبير س و ≤ صفر . حيث س و هى الكمية المنتجة من المنتج و والتى يجب أن تكون موجبة أو مساوية للصفر.

النموذج النمطى للبرمجة الخطية

يمكن التعرف على الشكل العام للنموذج النمطى للبرمجة الخطية إذا افتراضنا أن هناك عدد من الموارد الإنتاجية والتى يبلغ عددها م وتستخدم فى القيام بأنشطة متنافسة يبلغ عددها ن.

فإذا افتراضنا أن س و تعبر عن حجم النشاط و (أى أن س و هى متغير قرار) وحيث و = ١ ، ٢ ، .. ، ن . ولنفرض أن π هى المقياس الذى تم اختياره لأداء النموذج (دالة الهدف) . بالإضافة الى ذلك افترض أن ع و تعبر عن الزيادة فى قيمة π نتيجة لزيادة س و بوحدة واحدة (حيث و = ١ ، ٢ ، .. ، ن) . وتعبر ب ر عن الكمية المتاحة من المورد ر (حيث ر = ١ ، ٢ ، .. م)

أخيراً افترض أن أ رو هى كمية المورد ر التى تستخدم لكل وحدة من النشاط و ويمكن تلخيص المعلومات السابقة كما يلى:

الموارد / الأنشطة	الكمية المستخدمة لوحدة النشاط ١	٢	...	ن	الكمية المتاحة من المورد
١	أ ١١	أ ٢١	...	أ ن١	ب ١
٢	أ ١٢	أ ٢٢	...	أ ن٢	ب ٢
.					
.					
.					
م	أ ١م	أ ٢م	...	أ نم	ب م
Δ π للوحدة	ع ١	ع ٢	...	ع ن	
متغيرات القرار	س ١	س ٢	...	س ن	

ويمكن استخدام البيانات السابقة لإعداد النموذج النمطى للبرمجة الخطية والذى يهدف الى تحديد قيم لمتغيرات س١ ، س٢ ، ... سن والتى تحقق أقصى قيمة لدالة الهدف فى ظل القيود الموضوعة. ويظهر النموذج كالآتى:

عظم $\pi = ع_1 س_1 + ع_2 س_2 + \cdots + ع_ن س_ن$

فى ظل القيود التالية :

$أ_{11} س_1 + أ_{21} س_2 + \cdots + أ_{1ن} س_ن \geq ب_1$

$أ_{12} س_1 + أ_{22} س_2 + \cdots + أ_{2ن} س_ن \geq ب_2$

$أ_{م1} س_1 + أ_{م2} س_2 + \cdots + أ_{من} س_ن \geq ب_م$

$س_1 \geq$ صفر ، $س_2 \geq$ صفر ، ... ، $س_ن \geq$ صفر

ويطلق على هذا النموذج الشكل النمطى لنموذج البرمجة الخطية. ويعتبر أى نموذج رياضي تتوافر فيه صفات هذا الشكل نموذج برمجة خطية.

وهناك أشكال أخرى يمكن أن يتخذها نموذج البرمجة الخطية . وتتمثل فى الآتى :

١ – تدنية دالة الهدف بدلاًمن تعظيمها :

أوجد أدنى قيمة للدالة $\pi = ع_1 س_1 + ع_2 س_2 + \cdots + ع_ن س_ن$

٢ – وجود قيود تتضمن علامة أكبر من أو يساوى ، مثل :

$أ_{ر1} + \cdots + أ_{رن} \geq ب$

٣ – قد تكون هناك بعض القيود على شكل معادلات بدلاً من متباينات،

مثل :

$أ_{ر1} + أ_{ر2} + \cdots + أ = ب$

٤ – إسقاط شرط عدم السالبية عن بعض المتغيرات ، ويعبر عنها كالآتى:

س و متغير حر (أن غير مقيد الإشارة)

ويمكن أن يتضمن نموذج البرمجة الخطية أى من الحالات السابقة.

كيفية إعداد نموذج البرمجة الخطية:

تتضمن عملية إعداد نموذج البرمجة الخطية خطوات عامة يجب إتباعها. وهذه الخطوات هى نفسها التى تتبع عند إعداد أى نموذج رياضى وهى تتمثل فى الآتى:

١ – التعرف على متغيرات القرار، أى تحديد الأنشطة التى يستطيع متخذ القرار – ويرغب فى – الرقابة عليها.

٢ – تحديد دالة الهدف والتى تعبر عن المقياس الملائم لأداء النموذج.

٣ – تحديد القيود المختلفة التى تتضمنها المشكلة والتعبير عنها رياضيا.

وتوضح الأمثلة التالية كيفية تطبيق تلك الخطوات العامة لإعداد نموذج البرمجة الخطية.

مثال ١ :

تقوم إحدى الوحدات الإقتصادية بإنتاج خمسة منتجات مختلفة ، (س١ ، س٢ ، س٣ ، س٤ ، س٥). ويتطلب إنتاج كل من هذه المنتجات الخمسة إجراء عمليات إنتاجية على ثلاث آلات مختلفة. ويوضح الجدول الآتى إحتياجات كل من المنتجات من هذه الآلات الثلاث بالدقيقة:

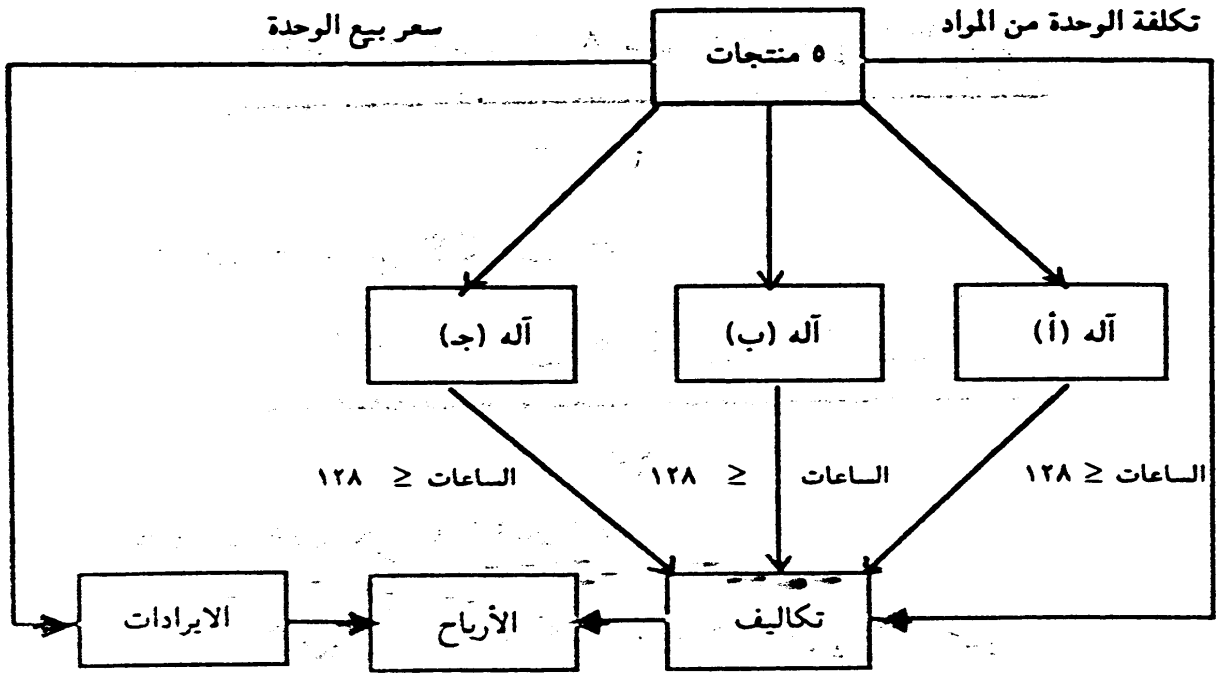
الأسبوع

المنتج	الآلة أ	ب	جـ
١	١٢	٨	٥
٢	٧	٩	١٠
٣	٨	٤	٧
٤	١٠	صفر	٣
٥	٧	١١	٢

وتبلغ طاقة كل آلة ١٢٨ ساعة أسبوعيا. وتباع المنتجات الخمسة فى سوق تسوده المنافسة الكاملة وبالتالى فإن أى كمية تباع بسعر السوق والذى يبلغ ٥ جنيه، ٤ جنيه ، ٥ جنيه ، ٤ جنيه، ٤ جنيه للوحدة من كل من المنتجات الخمسة على التوالى . وتبلغ التكلفة المتغيرة للأجور ٤ جنيه لكل ساعة تشغيل لكل من الآلتين أ و ب ، ٣ جنيه لساعة تشغيل الآلة جـ. كما تبلغ تكلفة المواد ٢ جنيه للوحدة من كل من المنتجين س١، س ٣ . كما تبلغ تكلفة المواد ١ جنيه للوحدة من كل من المنتجات س٢، س٤، س٥، ، وترغب الإدارة فى تعظيم ربح المنشأة.

والمطلوب هو إعداد نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة

ويمكن التعبير عن البيانات التى يتضمنها المثال بياناً كما يلى :



ويتطلب إعداد نموذج البرمجة الخطية لهذا المثال ضرورة تحديد متغيرات القرار أولاً. وتتمثل متغيرات القرار فى هذه الحالة فى الآتى:

س١ = الكمية المنتجة من المنتج الأول أسبوعيا.

س٢ = الكمية المنتجة من المنتج الثانى أسبوعيا.

س٣ = الكمية المنتجة من المنتج الثالث أسبوعيا.

س٤ = الكمية المنتجة من المنتج الرابع أسبوعيا.

س٥ = الكمية المنتجة من المنتج الخامس أسبوعيا.

ويلى تحديد المتغيرات ضرورة إعداد دالة الهدف والقيود المختلفة ويلاحظ من البيانات المعطاة أنه قد تم تحديد إحتياجات الوحدة من كل منتج للتشغيل على كل آلة بالدقيقة بينما يتم قياس طاقة الآلة بالساعة. ويتطلب إعداد القيود ضرورة تحويل الساعات إلي دقائق أو العكس. ونظراً لأن الأجر يدفع بالساعة فإنه يكون من الأفضل تحويل الدقائق إلي ساعات عند إعداد القيود. ويتم ذلك كما يلى :

عدد الساعات على الآلة (أ) =

$$\frac{١٢س_{١} + ٧س_{٢} + ٨س_{٣} + ١٠س_{٤} + ٧س_{٥}}{٦٠}$$

عدد الساعات على الآلة (ب) =

$$\frac{٨س_{١} + ٩س_{٢} + ٤س_{٣} + ١١س_{٥}}{٦٠}$$

عدد الساعات على الآلة (جـ) =

$$\frac{٥س_{١} + ١٠س_{٢} + ٧س_{٣} + ٣س_{٤} + ٢س_{٥}}{٦٠}$$

وقد قسمنا إحتياجات المنتجات على ٦٠ لتحويلها إلى ساعات وذلك نظراً لأن زمن التشغيل يكون بالدقة بينما تتحدد معاملات التكلفة على أساس الساعة. ويكون نموذج البرمجة الخطية كما يلى :

دالة الهدف

$$\text{عظم } ٣ \left(س_{١} + س_{٢} + س_{٣} + س_{٤} + س_{٥} \right)$$

$$-٤ \left(\frac{١٢س_{١} + ٧س_{٢} + ٨س_{٣} + ١٠س_{٤} + ٧س_{٥}}{٦٠} \right)$$

$$-٤ \left(\frac{٨س_{٢} + ٩س_{٢} + ٧س_{٣} + ٤س_{٤} + ١١س_{٥}}{٦٠} \right)$$

$$-٣\left(\frac{٥س_١ + ١٠س_٢ + ٧س_٣ + ٣س_٤ + ٢س_٥}{٦٠}\right)$$

في ظل : القيود الموضوعة

$$\frac{١٢س_١ + ٧س_٢ + ٨س_٣ + ١٠س_٤ + ٧س_٥}{٦٠} \geq ١٢٨$$

$$\frac{٨س_١ + ٩س_٢ + ٤س_٣ + ١٠س_٥}{٦٠} \geq ١٢٨$$

$$\frac{٥س_١ + ١٠س_٢ + ٧س_٣ + ٣س_٤ + ٢س_٥}{٦٠} \geq ١٢٨$$

القيود المنطقية (الطبيعية)

س١ ، س٢ ، س٣ ، س٤ ، س٥ ≥ صفر

وتبين دالة الهدف ربح الوحدة الإقتصادية معبراً عنها بالفرق بين الإيراد الإجمالى وتكلفة المواد والأجور . ويعبر الجزء الأول من دالة الهدف عن زيادة الإيراد الإجمالى على تكلفة المواد. والذى يتحدد كالآتى:

	س١	س٢	س٣	س٤	س٥
سعر بيع الوحدة	٥	٤	٥	٤	٤
تكلفة المواد للوحدة	٢	١	٢	١	١
صافى سعر البيع قبل خصم الأجور	٣	٣	٣	٣	٣

وأمكن تبسيط هذه العلاقة الرياضية كما يلى :

$$٣ (س_{١} + س_{٢} + س_{٣} + س_{٤} + س_{٥})$$

أما الأجزاء الثلاثة الأخرى فهى تعبر عن تكلفة الأجور.

ويتضمن النموذج ثلاثة قيود موضوعية يعبر كل منها عن طاقة أحدى الآلآت ويمكن تبسيط التعبير عن هذه القيود يضرب كل من الطرفين فى ٦٠ وبالتالى يمكن التخلص من الصورة الكسرية فى القيود. كما يتضمن النموذج القيود الطبيعية (أو المنطقية) بالنسبة لكل منتج أى أن مجموع القيود التى يتضمنها النموذج ثمانية : ثلاثة قيود موضوعية وخمسة قيود طبيعية.

مثال ٢ :

تقوم إحدى المنشآت الزراعية بتشغيل أربعة مزارع مختلفة. وتخصص المنشأة مساحة معينة وعدد من العمال لكل مزرعة. وتظهر البيانات الخاصة بالموسم الزراعى القادم كما يلى:

المزرعة	المساحة الممكن إستخدامها بالفدان	ساعات العمل المتاحة شهريا
١	٥٠٠	١ر٧٠٠
٢	٩٠٠	٣ر٠٠٠
٣	٣٠٠	٩٠٠
٤	٧٠٠	٢ر٢٠٠

وتنوى المنشأة زراعة ثلاثة محاصيل. وتختلف هذه المحاصيل أساساً من حيث ربحية الفدات وحجم العمالة المطلوب لها. بالإضافة إلى ذلك فإن المساحة المخصصة لكل محصول يحددها مايتطلبه جنى المحصول من معدات .

ويظهر الجدول الآتى المساحة والعمالة المخصصة لكل محصول وكذلك الربح للفدان :

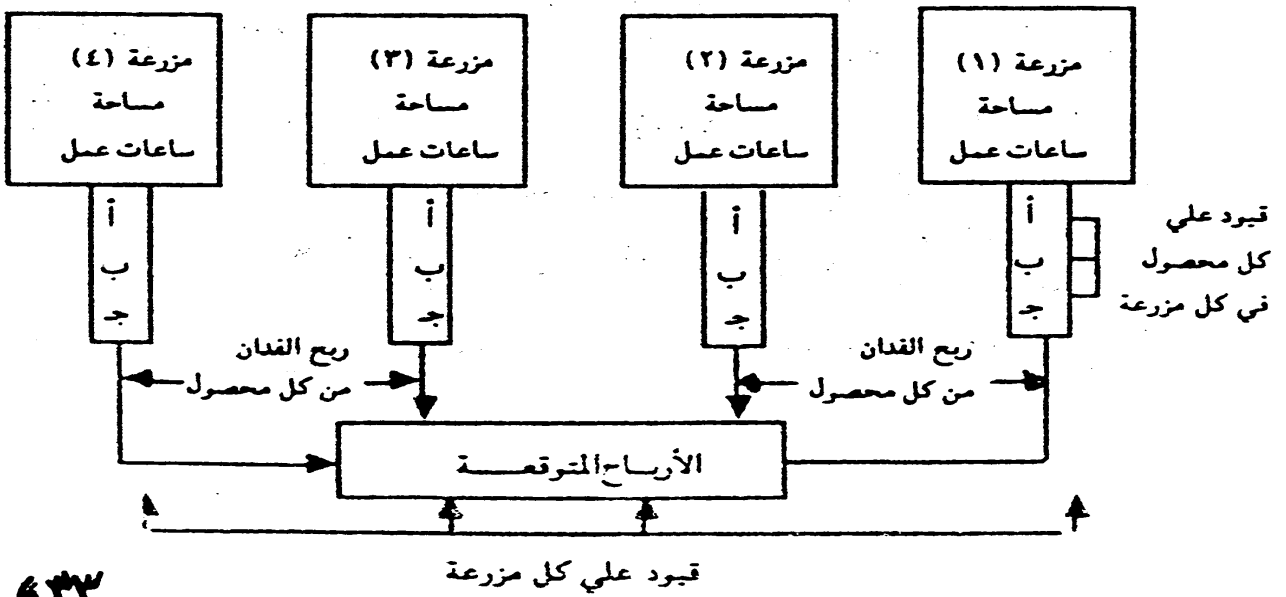
المحصول	أقصى مساحة ممكن زراعتها	ساعات العمل المطلوبة شهريا	الربح المتوقع ٠ للفدان
	فدان		جنيه
أ	٧٠٠	٢	٥٠٠
ب	٨٠٠	٤	٢٠٠
جـ	٣٠٠	٣	٣٠٠

وتحاول الإدارة توزيع عبء العمل على المزارع الأربعة بطريقة عادلة. لذلك فإن سياسة الإدارة هى أن تكون نسبة المساحة الممكن إستخدامها متساوية بالنسبة للمزارع الأربعة. ويمكن أن تنتج أى تشكيلة من المحاصيل فى أى من المزارع طالما أن بقية القيود قد تم إستيفائها (بما فيها العدالة فى توزيع عبء العمل)، وترغب الادارة فى تحديد عدد الأفدنة التى يجب زراعتها من كل محصول فى كل مزرعه وذلك بما يحقق أقصى ربح ممكن.

والمطلوب : إعداد نموذج البرمجة الخطية للمشكلة .

يمكن وضع البيانات السابقة فى صورة بيانية كما يلى :

عبء العمل موزع بطريقة عادلة



وتكون متغيرات القرار هى :

$أ_ر$ = المساحة المخصصة للمحصول أ فى المزرعة ر

$ب_ر$ = المساحة المخصصة للمحصول ب فى المزرعة ر

$جـ_ر$ = المساحة المخصصة للمحصول جـ فى المزرعة ر

حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

ويكون النموذج كما يلى :

عظم $\pi = ٥٠٠ \sum_{ر=١}^{٤} أ_ر + ٢٠٠ \sum_{ر=١}^{٤} ب_ر + ٣٠٠ \sum_{ر=١}^{٤} جـ_ر$

فى ظل :	ر = ١	ر = ١	ر = ١
$أ_١ + ب_١ + جـ_١$		≤ ٥٠٠	(١)
$أ_٢ + ب_٢ + جـ_٢$		≤ ٩٠٠	(٢)
$أ_٣ + ب_٣ + جـ_٣$		≤ ٣٠٠	(٣)
$أ_٤ + ب_٤ + جـ_٤$		≤ ٧٠٠	(٤)
$٢ أ_١ + ٤ ب_١ + ٣ جـ_١$		≤ ١٫٧٠٠	(٥)
$٢ أ_٢ + ٤ ب_٢ + ٣ جـ_٢$		≤ ٣٫٠٠٠	(٦)
$٢ أ_٣ + ٤ ب_٣ + ٣ جـ_٣$		≤ ٩٠٠	(٧)
$٢ أ_٤ + ٤ ب_٤ + ٣ جـ_٤$		≤ ٢٫٢٠٠	(٨)
$\sum_{ر=١}^{٤}$	$أ_ر$	≤ ٧٠٠	(٩)
$\sum_{ر=١}^{٤}$	$ب_ر$	≤ ٨٠٠	(١٠)
$\sum_{ر=١}^{٤}$	$جـ_ر$	≤ ٣٠٠	(١١)

$$\frac{أ_{1} + ب_{1} + جـ_{1}}{٥٠٠} - \frac{أ_{2} + ب_{2} + جـ_{2}}{٩٠٠} = \text{صفر} \qquad (١٢)$$

$$\frac{أ_{1} + ب_{1} + جـ_{1}}{٥٠٠} - \frac{أ_{3} + ب_{3} + جـ_{3}}{٣٠٠} = \text{صفر} \qquad (١٣)$$

$$\frac{أ_{1} + ب_{1} + جـ_{1}}{٥٠٠} - \frac{أ_{4} + ب_{4} + جـ_{4}}{٣٠٠} = \text{صفر} \qquad (١٤)$$

جميع المتغيرات $\geq$ صفر

وتعبر القيود (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) عن قيود المساحة الممكن إستخدامها فى كل مزرعة. بينما تعبر القيود (٥) ، (٦) ، (٧) ، (٨) عن ساعات العمل المتاحة فى كل مزرعة . وتعبر القيود (٩)، (١٠) ، (١١) عن أقصى كمية يمكن رزاعتها بالنسبة لكل محصول. هذا بينما تعبر القيود (١٢)، (١٣) ، (١٤) عن شرط العدالة فى توزيع عبء العمل فى كل مزرعة.

وبلاحظ أن القيود (١) ، (١٢)، (١٣) ، (١٤) معا تعنى ضمنيا ضرورة تحقيق القيود (٢) ، (٣) ، (٤) . ولهذا السبب يمكن أن نطلق على القيود (٢)، (٣)، (٤) قيود زائدة (أو غير مؤثرة) Redundent constraints وبالتالى يمكن إستبعادها من النموذج دون التأثير على الحل. مع ذلك فإن إضافة مثل هذه القيود الزائدة لايضير بالنموذج وإنما يؤدى إلي إضافة عمليات حسابه يمكن الإستغناء عنها.

مثال ٣ :

تقوم شركة الحديد والصلب بخلط وصهر الحديد الخام المستخرج من أربعة مناجم مختلفة. وقد أظهرت الدراسات المختلفة التى قامت بها إدارة الشركة ضرورة توافر حد أدنى لثلاثة عناصر رئيسية وذلك حتى يمكن إنتاج خليط مقبول. ويحتوى الخام المستخرج من كل من المناجم الأربعة على هذه العناصر الثلاثة ولكن بنسب متفاوتة وكذلك بتكلفة مختلفة.

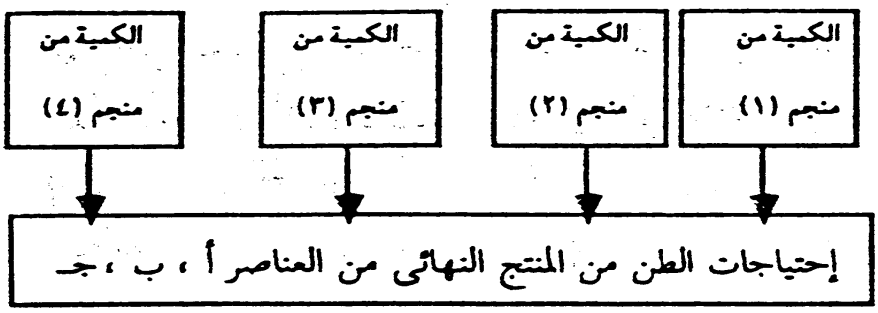
ويبين الجدول التالى كمية كل عنصر بالرطل لكل طن من الخام المستخرج من كل منجم، وكذلك الحد الأدنى اللازم من كل عنصر وتكلفة الطن من الخام.

العناصر الأساسية	المنجم				الحد الأدنى
	١	٢	٣	٤	المطلوب للطن
أ	١٠	٣	٨	٢	٥
ب	٩٠	١٥٠	٧٥	١٧٥	١٠٠
جـ	٤٥	٢٥	٢٠	٣٧	٣٠
تكلفة الطن (جنيه)	٨٠٠	٤٠٠	٦٠٠	٥٠٠	

افترض أن كميات العناصر الأساسية قابلة للإضافة، أى أنه إذا كان الطن من الخام المستخرج من المنجم (١) يشتمل على ١٠ أرطال من العنصر (أ)، وكان الطن من الخام المستخرج من المنجم (٢) يشتمل على ٣ أرطال من نفس العنصر، فإن أى خليط يشتمل على كميات متساوية من هذين النوعين من الخام يشتمل على ١٣ رطل من العنصر (أ) لكل رطلين من الخليط، أى ٥ر٦ رطل لكل طن من الخليط. والمطلوب معرفة أى خليط يحقق القيود بأقل تكلفة ممكنة.

ويمكن التعبير عن بيانات المثال بيانيا كما يلى:

الرطل من	١	٢	٣	٤
أ	١٠	٣	٨	٢
ب	٩٠	١٥٠	٧٥	١٧٥
جـ	٤٥	٢٥	٢٠	٣٠
تكلفة طن الخام	٨٠٠ جنيه	٤٠٠ جنيه	٦٠٠ جنيه	٥٠٠ جنيه



وتكون متغيرات القرار هى :

س و = الجزء من طن الخام والذى إستخرج من المنجم و وإستخدم فى إنتاج طن واحد من المنتج النهائى .

ويكون النموذج كما يلى :

أوجد أدنى قيمة للدالة ت = ٨٠٠ س١ + ٤٠٠ س٢ + ٦٠٠ س٣ + ٥٠٠ س٤

فى ظل

$$١٠س_{١} + ٢س_{٢} + ٨س_{٣} + ٢س_{٤} \leq ٥ \quad (١)$$

$$٩٠س_{١} + ١٥٠س_{٢} + ٧٥س_{٣} + ١٧٥س_{٤} \leq ١٠٠ \quad (٢)$$

$$٤٥س_{١} + ٢٥س_{٢} + ٢٠س_{٣} + ٣٧س_{٤} \leq ٣٠ \quad (٣)$$

$$س_{١} + س_{٢} + س_{٣} + س_{٤} = ١ \quad (٤)$$

$$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} ، س_{٤} \geq صفر$$

وتعبر القيود (١) ، (٢) ، (٣) عن الكمية الواجب توافرها من كل من العناصر أ ، ب ، جـ على التوالى. بينما يعبر القيد رقم (٤) عن نسبة الكمية من الخام المستخرج من كل منجم والمستخدمة فى إنتاج الطن من المنتج النهائى.

٥- الحل البيانى لنموذج البرمجة الخطية

يمكن أن يستخدم المدخل البيانى لتوفير صورة عامة للطريقة التى يتم بها حل نموذج البرمجة الخطية. ويقتصر إستخدام المدخل البيانى على تلك الحالات التى تتضمن متغيرين أو ثلاثة متغيرات للقرار على الأكثر. ويجب على القارىء أن يعى أن هذا المدخل لايمثل الإجراء العام لحل مشاكل البرمجة الخطية وإنما نهدف بعرض هذا المدخل إلى إكتساب فهم لطبيعة حلول البرمجة الخطية.

ويمكن أن نتعرف على المدخل البيانى لحل مشاكل البرمجة الخطية بإفتراض النموذج التالى:

عظم $٣٠ س_١ + ٤٠ س_٢$

فى ظل :

$س_١ + ٢ س_٢ \geq ١٧$ (١)

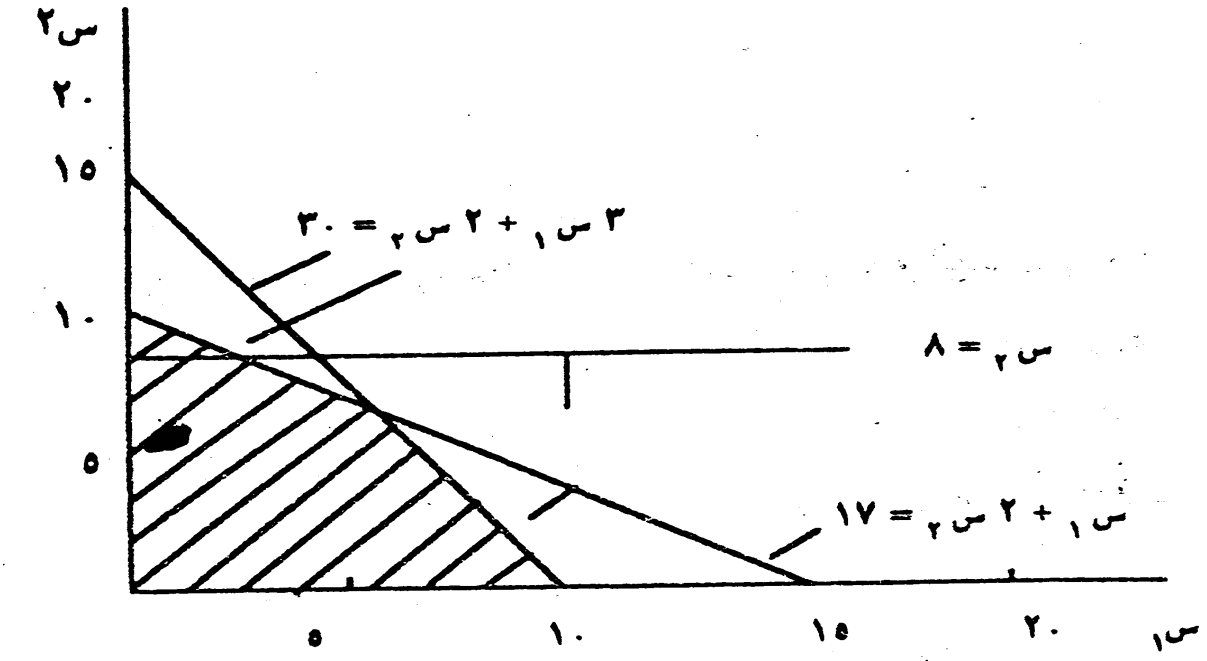
$٣ س_١ + ٢ س_٢ \geq ٣٠$ (٢)

$س_٢ \geq ٨$ (٣)

$س_١ ، س_٢ \geq$ صفر (٤)

ونظراً لأن نموذج البرمجة الخطية يفترض الخطية فى العلاقات بين المتغيرات، فإنه من الممكن التعبير عن هذه العلاقات بخطوط مستقيمة. ونبدأ بتعريف محور لمتغير القرار $س_١$ ، وآخر لمتغير القرار $س_٢$. ويتم وضع القيود المختلفة على الرسم البيانى بدءاً بالقيد رقم (٤) وهو الذى يعبر عن شرط عدم السالبية non- negativtivity. ويحدد هذا القيد الركن من المسطح والذى يتم فيه تصوير النموذج بيانيا. وحيث أن كل من $س_١$ ، $س_٢$ لايتخذ قيماً سالبة فإننا نستخدم الربع الموجب positive quadrant

من المسطح . **ثم نقوم برسم خطوط مستقيمة لتعبر عن كل من القيود** الثالثة الأخرى وعلى سبيل المثال، يمكن أن نرسم الخط المستقيم المعبر عن القيد الأول بتحديد قيمة كل متغير عندما يكون الآخر مساويا الصفر، فإذا كانت س١ = صفر فإن س٢ = $\frac{١}{٨}$ ٨ ، ويكون س١ = ١٧ إذا كانت س٢ = صفر. ثم نحدد إحداثيات النقطتين (صفر ، $\frac{١}{٨}$ ٨)، (١٧ ، صفر) على محورى س١ ، س٢ ونوصل النقطتين لنحصل على الخط المستقيم الذى يعبر عن القيد رقم (١) ويمكن إتباع نفس الإجراء للتعبير عن بقية القيود بيانياً. ويترتب على ذلك أن يصبح التعبير البيانى عن القيود كما يلى :

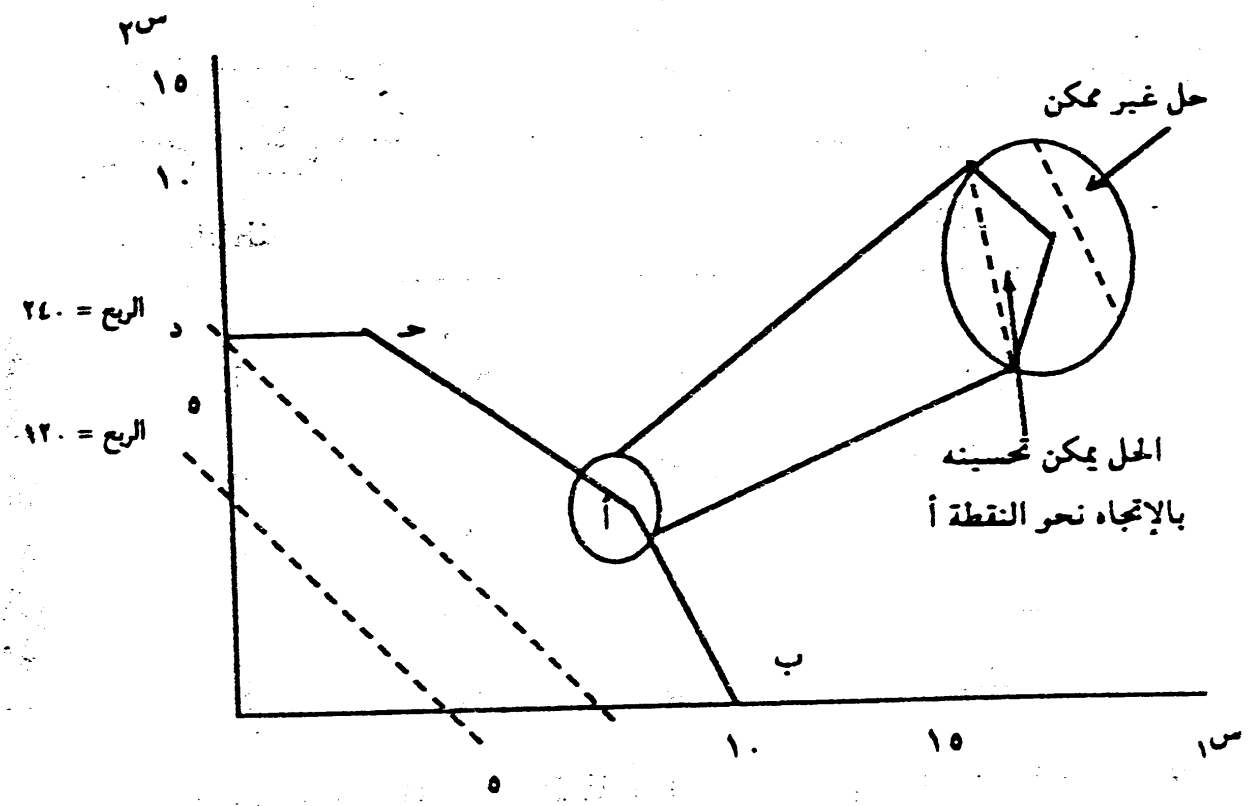


ويجب أن نحدد إتجاه تأثير كل من القيود. ذلك أن الخط المستقيم يعبر عن معادلة، إلا أن القيود التى يتضمنها المثال تعبر عن متباينة، وتستخدم النقطة (صفر ، صفر) كأساس لاختبار تأثير إتجاه تأثير القيود. وبالنسبة للقيد الأول على سبيل المثال، تكون قيمة القيد عند النقطة (صفر، صفر) هى (صفر) + (٢) (صفر) ≥ ١٧ ، أى أن النقاط التى تقع أسفل

الخط المستقيم هى التى تحقق المتباينة. وتعبر المساحة التى تقع أسفل الخط المستقيم المعبر عن القيد عن هذه النقاط، ويشير السهم إلى إتجاه تأثير القيد، ويمكن إتباع نفس الخطوات لتحديد إتجاه تأثير كل من القيدين الآخرين (٢) ، (٣).

ويجب أن تحقق حلول المشكلة جميع القيود الأربعة المذكورة فى هذا المثال. وتعبر منطقة الحلول الممكنة feasible region وهو المساحة المظللة فى الشكل السابق – عن مجموعة القيم التى يمكن أن يتخذها كل من $س_1$، $س_2$ وتحقق جميع القيود فى نفس الوقت. ويجب البحث عن الحل الأمثل من بين هذه النقط التى يحتوى عليها نطاق الحلول الممكنة.

ونلاحظ أنه حتى الآن لم يتم التعبير عن دالة الهدف فى الشكل البيانى ويمكن التعبير عن دالة الهدف بيانياً بإفتراض أى قيمة لدالة الهدف، ولتكن ١٢٠ جنيه مثلاً – ثم التعبير عن دالة الهدف بالمعادلة $٣٠ س_1 + ٤٠ س_2 = ١٢٠$ وبإستخدام نفس الإجراء الذى إتبعناه للتعبير عن القيود بيانيا نجد أن $س_1 = ٤$ عندما تكون $س_2 =$ صفر، وتكون $س_2 = ٣$ عندما تكون $س_1 =$ صفر. ونقوم برسم خط مستقيم يعبر عن هذه العلاقة. وبإفتراض قيم مختلفة لدالة الهدف يمكن تكرار رسم خطوط مستقيمة إلى أن نصل إلى الخط الذى يمس أحد أركان منطقة الحلول الممكنة. ويمكن أن نعبر عن إتجاه البحث عن الحل الأمثل بيانياً كما فى الشكل التالى :



ويلاحظ أن الخطوط المعبرة عن دالة الهدف تكون دائماً متوازية. ويلاحظ إيضاً أنه كلما زادت قيمة دالة الهدف كلما إتجه الخط المستقيم إلى أعلى تجاه الجانب الأيمن من الشكل ويستمر تحريك دالة الهدف إلى أن نصل إلي النقطة أ ، ويلاحظ من الشكل أن أى تحريك لدالة الهدف بعد هذه النقطة يؤدى إلي حلول تقع خارج نطاق الحلول الممكن. ويطلق على الحل فى هذه الحالة حل غير ممكن. كذلك إذا كان الخط المعبر عن دالة الهدف يقع تحت النقطة أ فإن هذا يعنى أنه يمكن تحسين قيمة دالة الهدف بتحريك الدالة تجاه النقطة أ ، هذا يعنى أن النقطة أ تعبر عن الحل الأمثل.

ويجب أن نراعى أن الحل الأمثل يقع دائماً عند أحد أركان منطقة الحلول الممكنة. أى أن الحل الأمثل يكون عند أى من النقاط أ،ب،ج ، أو د . ذلك أنه بعد أى من هذه النقاط يكون الحل غير ممكن. وبالتالى

فإنه لتحديد الحل الأمثل يجب أن نقوم بتحديد قيمة دالة الهدف عند كل من هذه النقاط. وتعبر النقطة التى يكون عندها أفضل قيمة لدالة الهدف عن الحل الأمثل ويمكن أن نبين ذلك فى الجدول التالى :

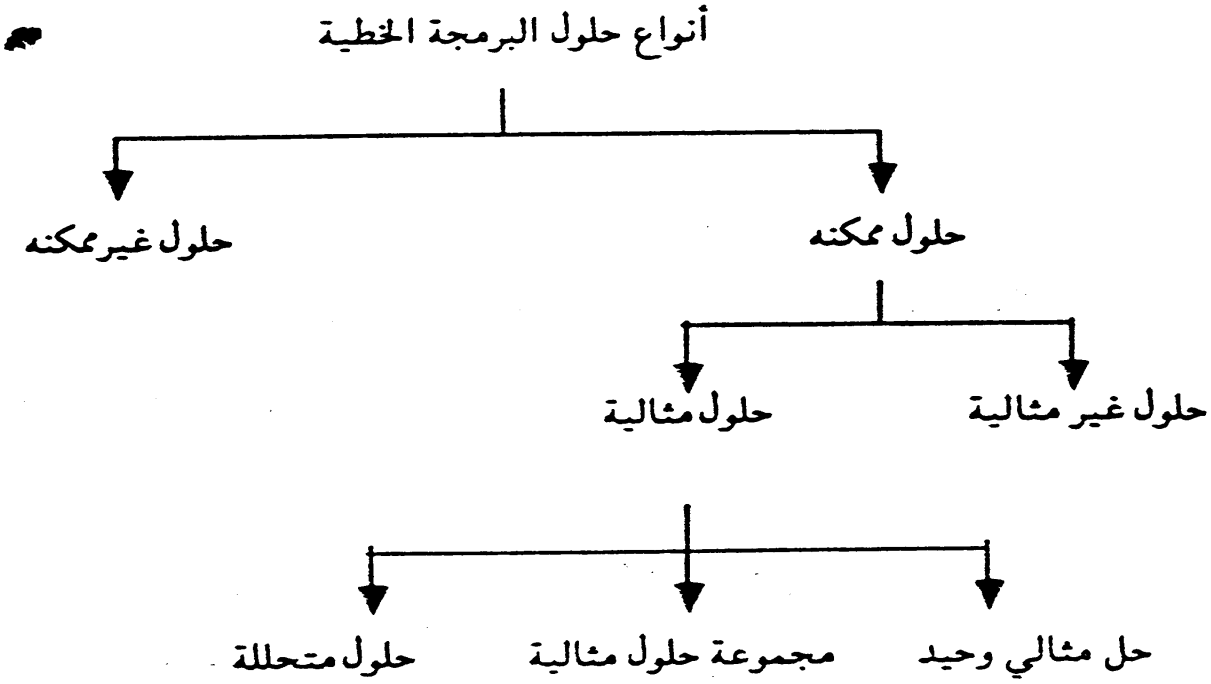
النقطة	س١	س٢	دالة الهدف
أ	٦ ١/٢	٥ ١/٤	٤٠٠ جنيه
ب	١٠	صفر	٣٠٠ جنيه
جـ	١	٨	٣٥٠ جنيه
د	صفر	٨	٣٢٠ جنيه
هـ	صفر	صفر	صفر

ويبين هذا الجدول أن النقطة أ هى التى يكون عندها الحل الأمثل، أى أنه يجب إنتاج ٦ ١/٢ وحدة من س١، ٥ ١/٢ وحدة من س٢ لتحقيق أقصى ربح ممكن وقدره ٤٠٥ جنيه.

ويعتبر وجود الحل الأمثل عند أحد أركان منطقة الحلول الممكنه حقيقة واقعة بالنسبة لأى برنامج خطى ذا حلول محدودة العدد finite Solution. ولقد أدت هذه النتيجة وما يترتب عليها من تحليل إلى ظهور مدخل جبرى لحل مشاكل البرمجة الخطية يطلق عليه « طريقة السمبلكس » Simplex algorithm ويعنى لفظ « السمبلكس » فى مجال العلوم الرياضية ذلك الشكل الهندسى المحدب convex والذى يتحدد بمجموعة من الخطوط المستقيمة والتى تصل بين النقط الواقعة على حدوده الخارجية. وتعتبر طريقة السمبلكس طريقة حسابية تتضمن عدد من الإجراءات التى يتم تطبيقها بطريقة منتظمة للبحث عن الحل الأمثل والذى يقع عند أحد أركان منطقة الحلول الممكنة.

٦- أنواع حلول البومجة الخطية

ذكرنا فيما سبق أن مجموعة القيود التى يتضمنها نموذج البرمجة الخطية تحدد منطقة الحلول الممكنة والتى يمكن البحث عن الحل الأمثل عند أحد أركانها. وقد يتبادر إلى الذهن أنه يمكن إيجاد حل لأى مشكلة يتم التعبيرعنها بنموذج البرمجة الخطية إلا أنه فى كثير من الأحيان قد توجد بعض النماذج التى لاحل لها. كما قد يكون هناك حل ولكنه غير أمثل. ومن ناحية أخرى قد يكون هناك أكثر من حل أمثل للمشكلة ويمكن تصنيف أنواع حلول البرمجة الخطية كما هو موضح فى الشكل التالى:



ونتناول كل من هذه الأنواع من الحلول وكيفية التعرف عليها بشئ من التفصيل :

٦-١- **الحلول الممكنه والحلول غير الممكنه**: تعبر الحلول الممكنه عن تلك الحلول التى يمكن تحقيقها فى ظل القيود المفروضة على الحل.

ويطلق على أحد الحلول أسم حل أساسى ممكن إذا كان هذا الحل يقع عند أحد أركان منطقة الحلول الممكنه. ويبين المثال السابق نموذجاً للحلول الممكنه.

٦-٢- الحلول غير الممكنه: وهناك نماذج البرمجة الخطية والتى لايمكن حلها. أى أن أى حل لهذه النماذج يكون غير ممكن فى ظل القيود الموضوعية. وهناك العديد من النماذج التى لايمكن حلها نذكر منها النموذجين التاليين.

نموذج ١ :

عظم $\pi = س_1 + س_2$

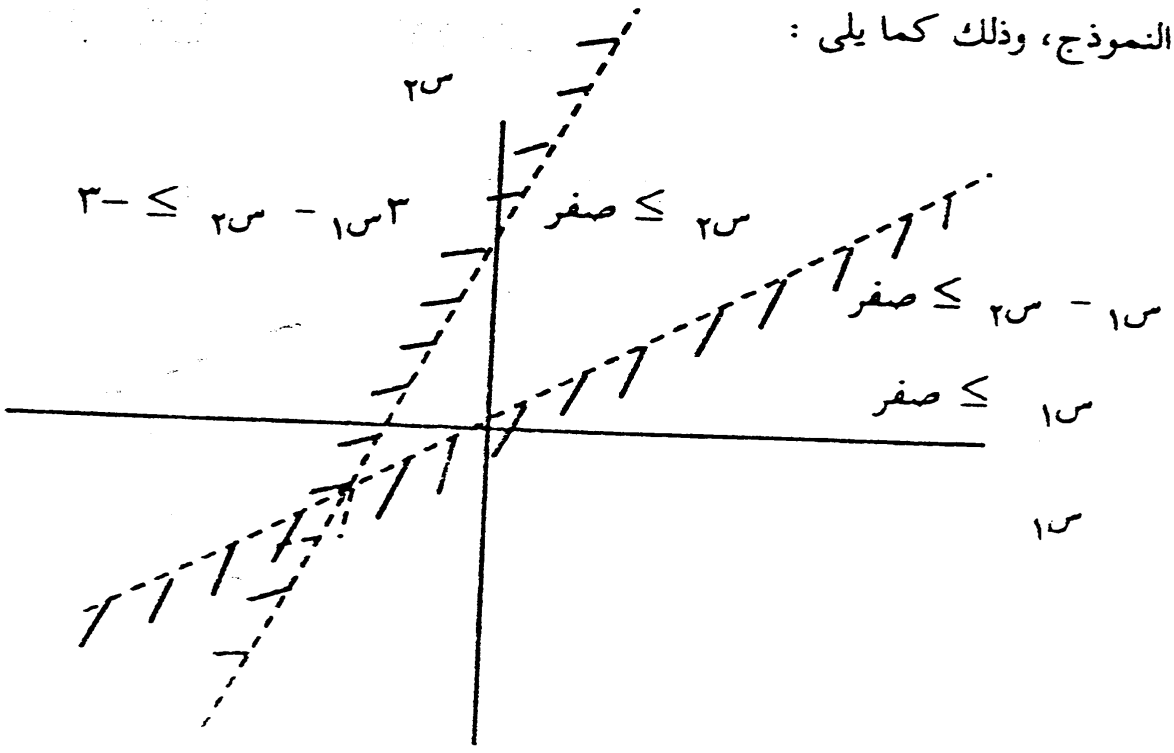
فى ظل

$$س_1 - س_2 \leq \text{صفر} \quad (١)$$

$$٣س_1 - س_2 \leq -٣ \quad (٢)$$

$$س_1 ، س_2 \leq \text{صفر} \quad (٣)$$

ويمكن بإستخدام المدخل البيانى أن نحدد ماإذا كان هناك حل ممكن لهذا النموذج، وذلك كما يلى :



ويلاحظ من هذا الشكل أن أى حل يجب أن يقع أسفل الخط المستقيم المعبر عن القيد رقم (١). وفى نفس الوقت أعلى الخط المستقيم الذى يعبر عن القيد رقم (٢). إلا أن مثل هذا الحل يمكن أن يقع فقط فى منطقة الربع السالب حيث يلتقى الخطان المستقيمان ويكون تأثير القيدان مشتركان فى المنطقة أسفل نقطة الالتقاء. إلا أن أى حل يقع فى هذه المنطقة يكون مخالفاً لشرط عدم السالبية والذى يعبر عنه القيد (٣). وبالتالى لايمكن وجود أى حل ممكن لهذا النموذج.

ـ نموذج ٢:

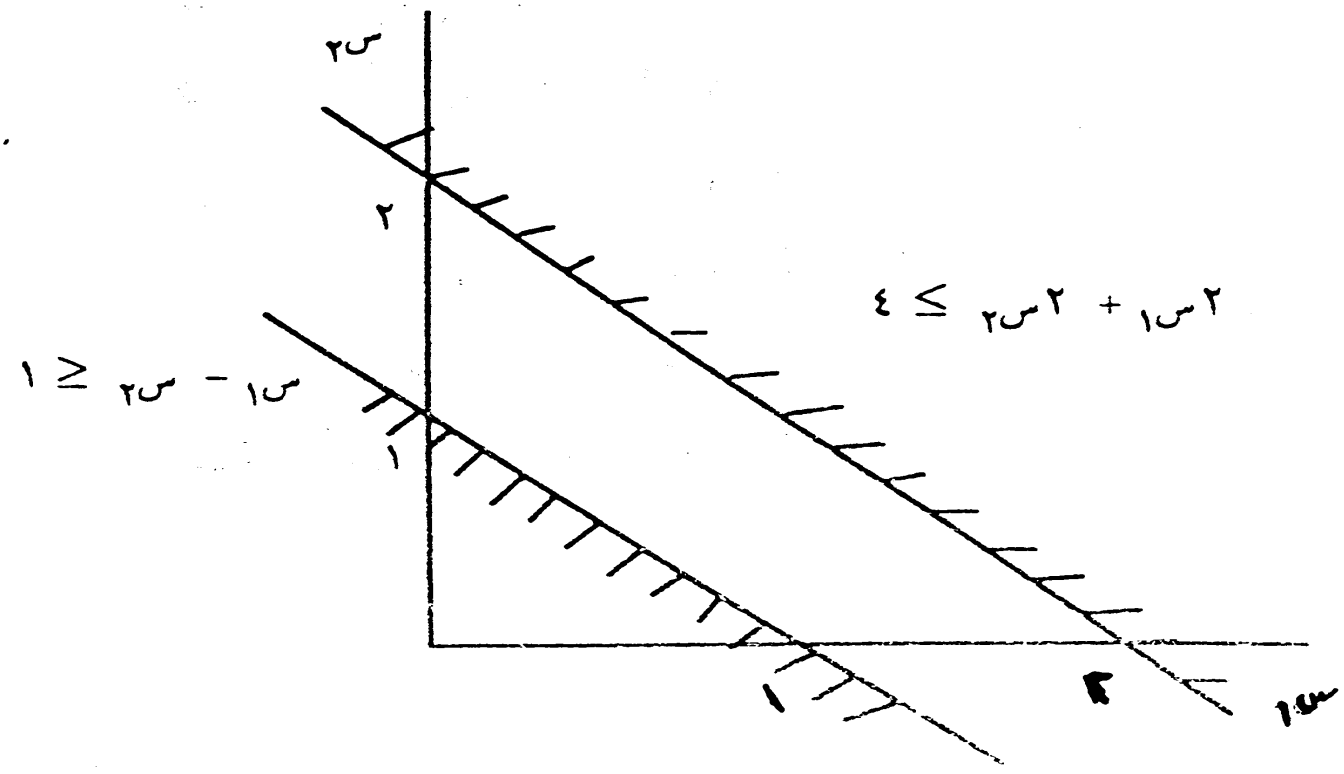
عظم $\pi = ٣س_١ + ٢س_٢$

فى ظل $س_١ + س_٢ \geq ١$

$٢س_١ + ٢س_٢ \leq ٤$

$س_١ ، س_٢ \geq$ صفر

ويكون التعبير البيانى لهذا النموذج كما يلى :



ويبين الشكل أن أى حل يجب أن يكون أعلى الخط المستقيم الذى يعبر عن القيد الثانى وفى نفس الوقت أسفل الخط المعبر عن القيد الأول (لاحظ علامات التباين فى القيود لها دورها فى تحديد إتجاه آثار القيود). وحيث أنه لايمكن وجود مثل هذا الحل الذى يحقق القيدين فإنه لايوجد حل ممكن لهذا النموذج.

٦-٣- الحلول الممكنة غير المثالية :

يعتبر الحل الممكن غير مثالى إذا كان من الممكن تحسينه. ويتحقق الحل الأمثل - كما سبق وأن ذكرنا - عند أحد أركان منطقة الحلول الممكنه، وهو الركن الذى يكون عنده الخط المعبر عن دالة الهدف مماسا لمنطقة الحلول الممكنة. وقد تكون هناك نماذج البرمجة الخطية والتى يكون لها حلول ممكنة ، ولكن لايمكن إختيار أحدها ليكون الحل الأمثل. وتحدث هذه الحالة إذا كانت منطقة الحلول الممكنة غير مغلقة أى أن عدد الحلول الممكنة غير محدد infinite.

ويمكن أن نوضح ذلك بالمثال التالى :

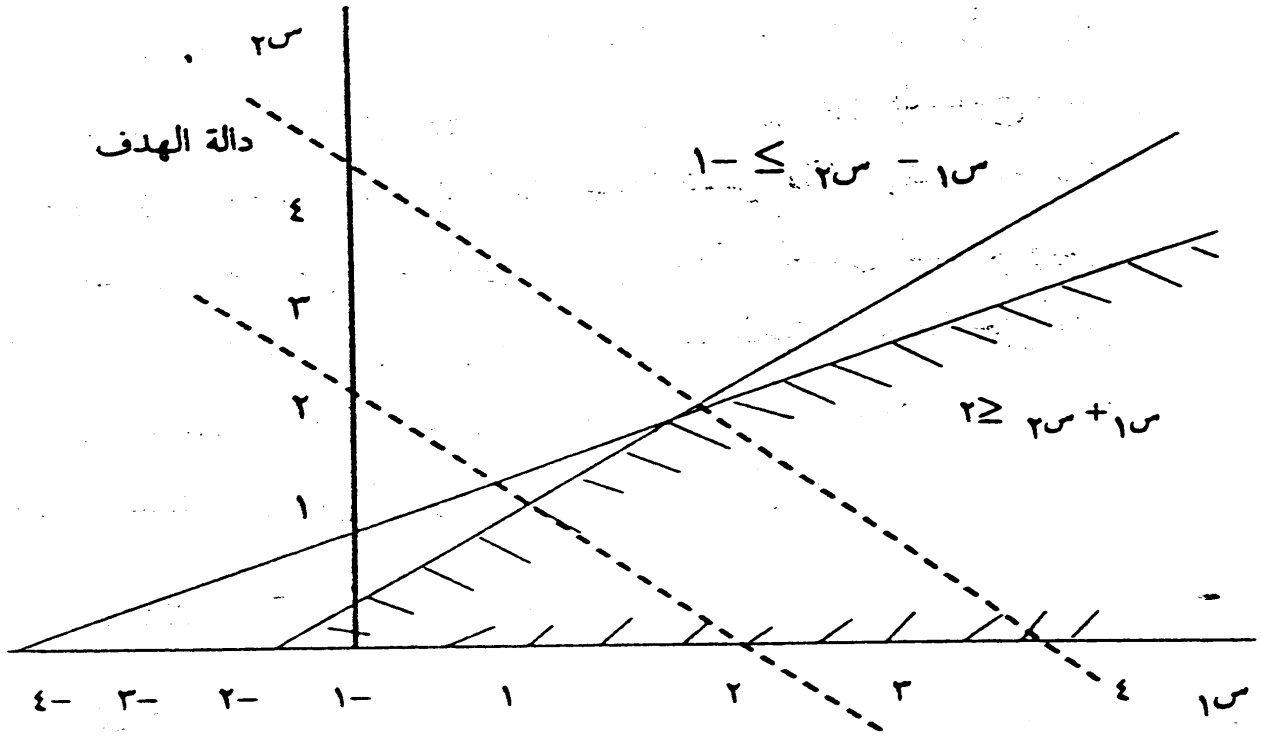
$$\text{عظم} = ٢س_١ + ٢س_٢$$

$$\text{فى ظل} \quad س_١ - س_٢ \leq -١$$

$$س_١ + س_٢ \geq ٢$$

$$س_١ ، س_٢ \leq \text{صفر}$$

ويمكن التعبير عن هذا النموذج بيانياً كما يلى :



ويبين هذا الشكل أن منطقة الحلول الممكنة مفتوحة من اليمين ويمكن أن تتخذ دالة الهدف أى قيمة غير محددة. ويعبر السهم عن إتجاه تحريك دالة الهدف. ويؤدى عدم وجود قيد يغلق الجانب الأيمن من منطقة الحدود الممكنة إلى أن تحريك دالة الهدف يستمر دون نهاية. وحيث أن الحل الأمثل يتحقق عند النقطة التى بعدها تخرج دالة الهدف من منطقة الحلول الممكنة فإن مثل هذا الحل لايمكن وجوده. ويطلق على الحل فى هذه الحالة «حل غير محدد» unbounded salution .

٦-٤- الحلول الممكنة المثالية :

هناك العديد من نماذج البرمجة الخطية التى يكون لها حلاً أمثل، وهى تلك النماذج التى يمكن أن تمس فيها دالة الهدف منطقة الحلول الممكنة عند نقطة واحدة تعبر عن أحد أركان المنطقة. وتكون أى قيمة تتخذها دالة الهدف بعد هذه النقطة غير ممكنة كما يمكن تحسين أى

قيمة لدالة الهدف قبل هذه النقطة بتحريك دالة الهدف تجاهها. وقد تكون هناك حالات معينة لنماذج البرمجة الخطية والتى يكون فيها النموذج أكثر من حل مثالى واحد. ويحدث ذلك عندما تمس دالة الهدف «جانبا» (خط مستقيم يعبر عن أحد القيود) من منطقة الحلول الممكنة وليس ركنا ففى هذه الحالة تكون كل نقطة على هذا الجانب بمثابة حل أمثل إذ يؤدى تحريك دالة الهدف بعدها إلى خروج دالة الهدف من منطقة الحلول الممكنة. ويمكن أن نوضح ذلك بالمثال التالى :

عظم π = $٣س_١ + ٢س_٢$

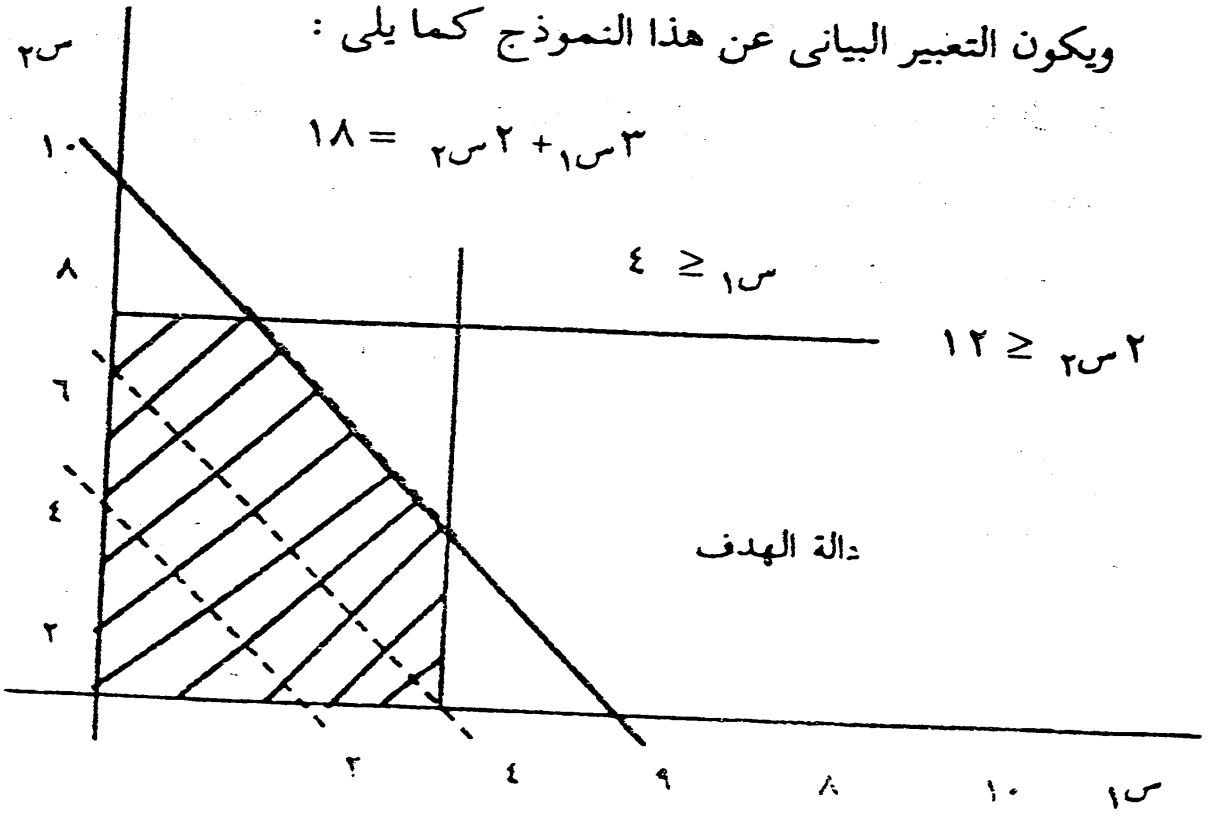
فى ظل $س_١ \geq ٤$

$٢س_٢ \geq ١٢$

$٣س_١ + ٢س_٢ \geq ١٨$

$س_١ ، س_٢ \geq$ صفر

ويكون التعبير البيانى عن هذا النموذج كما يلى :

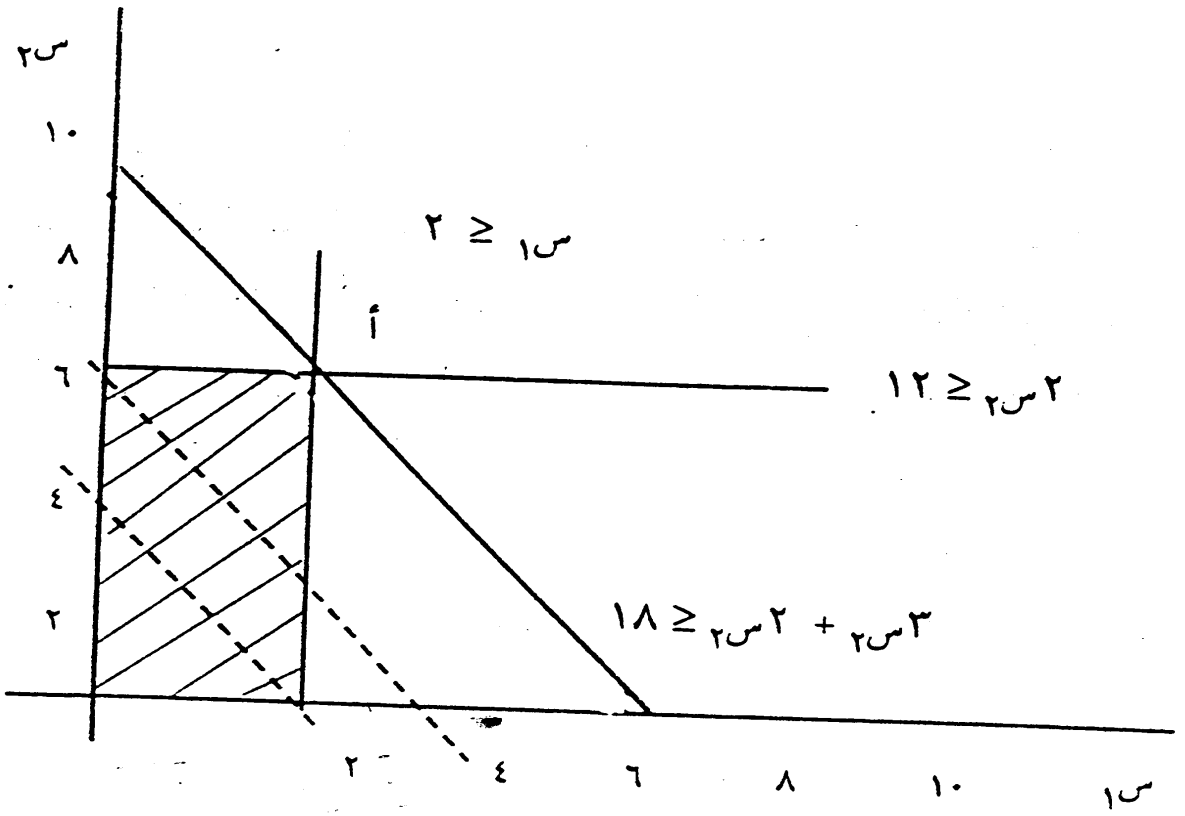


ويلاحظ من هذا الشكل أن دالة الهدف تمس القيد ٣س١ + ٢س٢ ≥ ١٨ ويمكن أن تكون النقطة أ حلا أمثل للنموذج كذلك فإن النقطة ب تتوافر فيها مواصفات الحل الأمثل. نفس القول ينطبق على أى نقطة تقع على الخط المستقيم الواصل بين النقطتين أ، ب. وعليه فإن هذا النموذج تكون له حلول مثالية متعددة. وتكون قيمة دالة الهدف واحدة عند أى من هذه الحلول المثالية. ويعنى وجود تعدد فى الحلول المثالية أنه يمكن تحقيق أقصى قيمة لدالة الهدف بإستخدام أى تشكيلة من متغيرات القرار والتى تقع قيمتها على الخط أ ب. فإذا كانت هذه المتغيرات تعبر عن منتجات فإنه يمكن تحقيق أقصى ربح بأى تشكيلة منتجات تقع على هذا الخط.

٦-٥- الحلول المتحللة Degenerate solutions :

سبق وأن ذكرنا أن الحل الأمثل يكون عند أحد أركان منطقة الحلول الممكنة. ويتحدا الركن عادة بنقطة تلاقى خطين مستقيمين يعبران عن قيدين من قيود النموذج.

وقد يحدث أن يلتقى أكثر من قيدين فى نقطة واحدة. ويؤدى ذلك إلى حدوث حالة من الدوران فى حلقة من الحلول. وقد يكون أحد هذه الحلول حلاً أمثل كما قد لايكون أى منها مثالياً. ويمكن أن نوضح ذلك بتعديل القيد الأول فى المثال السابق مباشرة ليصبح س١ ≥٢ .. ويكون التعبير البيانى عن النموذج فى هذه الحالة كما يلى:



ويبين الشكل أن الحل الأمثل يتحقق عند النقطة أ . وقد يبدو الوصول لهذا الحل يسيرا بإستخدام الحل البيانى، إلا أن حل هذا النموذج بإستخدام طريقة السمبلكس سوف يؤدى إلي تكرار العمليات الحسابية لأكثر من مرة إلى أن يتم فصل أحد القيود عن القيدين الآخرين. وما أن يتم ذلك يمكن تحديد الحل الأمثل النموذج.

حساسية نموذج البرمجة الخطية :

يقصد بتحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية تحديد مدى تأثر حل النموذج بالتغيرات التى قد تحدث فى البيانات التى تم إعداد النموذج على أساسها . ونحاول فى هذا المجال أن تبين أهمية إستخدام تحليل الحساسية عند إستخدام البرمجة الخطية كأداة مساعدة فى إتخاذ القرارات. ولنأخذ على سبيل المثال حالة رغبة الإدارة فى تحديد تشكيلة الإنتاج المثلى التى تحقق أقصى ربح ممكن فى هذه الحالة قد ترغب الإدارة فى دراسة أثر التغيرات فى حجم مساهمة كل منتج فى الأرباح الكلية للوحدة الإقتصادية.

وكذلك أثر الزيادة أو النقص فى حجم الموارد المتاحة. كما قد ترغب الإدراة فى التعرف على أثر إضافة أو إستبعاد أحد المنتجات على الحل القائم. ويفيد تحليل الحساسية بدرجة كبيرة فى ربط إستخدام البرمجة الخطية كأداة تخطيطية بتطبيق النتائج المترتبة على هذا الإستخدام. ذلك أنه قد تتغير البيانات المستخدمة عند إعداد النموذج عن تلك التى تكون متوافرة عند تطبيق النتائج ويجب أن نعرف كيف يؤثر هذا التغير على الحل. وعادة يوفر إستخدام الحاسبات الالكترونية مثل هذه المعلومات بطريقة ميسرة. ونحاول فى هذا المبحث أن نبين الفكرة الأساسية لتحليل الحساسية بإستخدام المدخل البيانى، وذلك من خلال دراسة أثر التغير فى معاملات دالة الهدف، والتغير فى كمية المواد المتاحة.

٧-١- أولاً : التغير فى معاملات دالة الهدف :

فى كثير من الحالات عندما يكون الهدف هو معظمة الربح، من الضرورى تقدير مساهمة كل منتج فى الربح. وترغب الإدارة عادة فى معرفة ماقد يحدث إذا حدث خطأ فى تقدير مساهمات المنتجات المختلفة فى الربح.

فإذا رجعنا إلى مثالنا الأول والذى يتضمن النموذج التالى :

$$\text{عظم } \pi = ٣٠س_١ + ٤٠س_٢$$

$$\text{فى ظل} \quad س_١ + ٢س_٢ \geq ١٧$$

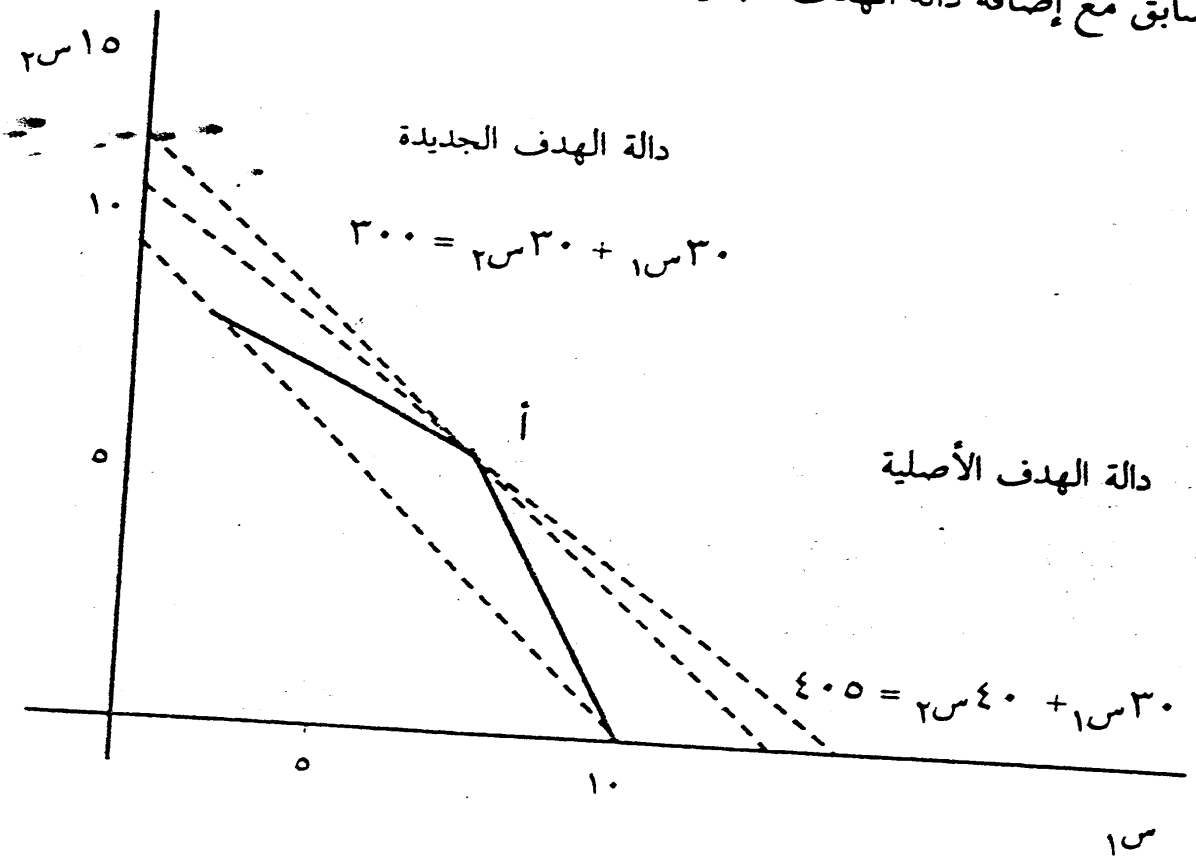
$$٣س_١ + س_٢ \geq ٣٠$$

$$س_٢ \geq ٨$$

$$س_١ ، س_٢ \geq \text{صفر}$$

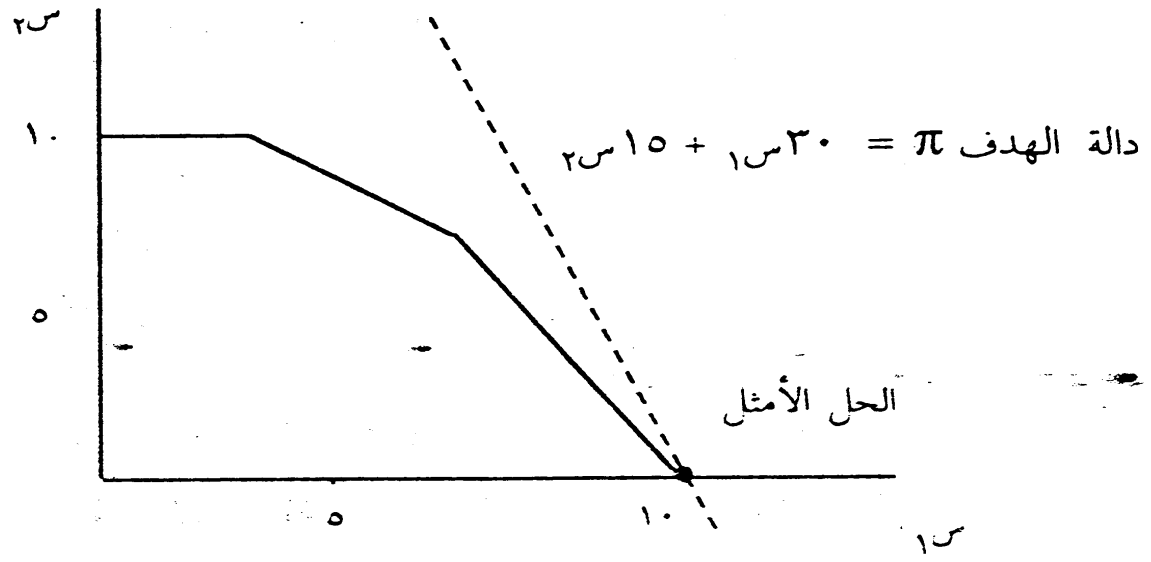
فإذا إفترضنا أن ربح الوحدة من المنتج الثانى إنخفض إلى ٣٠ جنيه بدلاً

من ٤٠ جنيه. وحيث أن الهدف هو تعظيم الربح فإن الإدارة تود أن تحدد ماإذا كان من الضرورى تغيير تشكيلة المنتجات، أى تخفيض الكمية المنتجة من س٢ وتزيد الكمية المنتجة من س١ وإذا رجعنا للمثال الأصلى لوجدنا أن الحل الأمثل يتحقق عند س١ = ٦٫٥ ، س٢ = ٢٥٫٥ وحدة. ولتحديد أثر التغير فى ربح الوحدة من س٢ نعيد تصوير النموذج السابق مع إضافة دالة الهدف الجديدة (بعد التغيير) وذلك كما يلى :



ويلاحظ من الشكل أن إنخفاض ربح الوحدة من س٢ لايؤدى إلى تغيير الحل الأمثل وهو س١ = ٦٫٥ ، س٢ = ٢٥٫٥ وحدة إلا أن هذا التغير يؤدى إلى تخفيض قيمة دالة **الهدف لتصبح** ٣٥٢٫٥ جنيه [(٣٠ × ٦٫٥) + (٣٠ × ٢٥٫٥)] بدلاً من ٤٠٥ جنيه . ويجب أن نلاحظ أن ميل دالة الهدف يزيد كلما إنخفض ربح الوحدة من س٢ . ونجد أن إدارة الشركة تضطر إلى تغير تشكيلة الإنتاج المثالية على سبيل المثال عندما ينخفض سعر

س٢ إلى ١٥ جنيه للوحدة. وفى هذه الحالة تقوم الإدارة بتوجيه مواردها لإنتاج المنتج س١ فقط والذى تبلغ الكمية المنتجة منه فى هذه الحالة ١٠ وحدات وتكون قيمة دالة الهدف ٣٠٠ جنيه . ويظهر ذلك بيانيا كما يلى :



إذن فإن أبسط طريقة لتحديد أثر إنخفاض ربح المنتج الثانى مع بقاء ربح المنتج الأول كما هو هى تحريك دالة الهدف دائريا. فإذا حدث تماس بين هذه الدالة ونقطة تعبر عن ركن خلاف الركن الأصلى المعبر عن الحل الأمثل الأصلى فإن هذا الحل الأمثل يتم تغييره.

ويساعد التصوير البيانى السابق مباشرة فى تحديد المعاملات الجديدة لدالة الهدف. ذلك أن تحريك دالة الهدف دائريا يعنى تغيير ميل الخط المعبر عن دالة الهدف ،كما يتضح من الشكل فإن الحل الحالى يظل مثاليا إلى أن يواجهنا ركنا آخر لمنطقة الحلول الممكنة. ويحدث ذلك عادة عندما توازى دالة الهدف أحد القيود. ونجد أن المعادلة الأصلية لدالة الهدف هى ٣٠ س١ + ٤٠ س٢ = ٤٠٥ وهى تعنى أن :

$$\text{س}_2 = \frac{٤٠٥}{٤٠} - \frac{٣٠}{٤٠}\,\text{س}_1$$

أى أن ميل دالة الهدف هو $-\frac{٣}{٤}$. ويمكن أن نضع ذلك فى صورة عامة بالتعبير عن دالة الهدف كما يلى :

$$ع_١ س_١ + ع_٢ س_٢ = ٤٠٥$$

وذلك يعنى أن ميل دالة الهدف هو $-\frac{ع_١}{ع_٢}$

وإذا ماتم تغيير دالة الهدف بدرجة كافية فإنها ستتقابل مع أحد القيدين التاليين :

$$٣ س_١ + ٢ س_٢ = ٣٠$$

أو

$$س_١ + ٢ س_٢ = ١٧$$

ونجد بالنسبة للقيد الأول أن الميل هو $-\frac{٣}{٢}$ أى أن:

$$س_٢ = \frac{٣٠}{٢} - \frac{٣}{٢} س_١$$

بينما نجد أم ميل القيد الثانى $-\frac{١}{٢}$.

فإذا بقيت $ع_١ = ٣٠$ فإنه يمكن تحديد القيمة الجديدة التى تتخذها $ع_٢$ والتى عندها يظل الحل الحالى حلاً أمثالا كما يلى:

$$-\frac{٣}{٢} = -\frac{٣٠}{ع_٢}$$ أى أن $ع_٢ = ٢٠$

والتى يكون عندها الربح $= ٣٠ س_١ + ٢٠ س_٢$

كذلك $-\frac{١}{٢} = -\frac{٣٠}{ع_٢}$ أى أن $ع_٢ = ٦٠$

والتى يكون عندها الربح = ٣٠ س ١ + ٦٠ س٢

وعلى ذلك فإن الحل الحالى يظل حلاً أمثالا طالما كان ربح المنتج الثانى يتراوح بين ٢٠ جنيه، ٦٠ جنيه للوحدة مع بقاء ربح الوحدة من المنتج الأول كما هو. فإذا إنخفض ربح الوحدة من س ٢ عن ٢٠ جنيه كان من الأفضل للشركة إنتاج ١٠ وحدات من س١ وعدم إنتاج أى وحدات من س٢ ، بينما يكون من الأفضل عدم إنتاج س١ وإنتاج ٨ وحدات من س٢ إذا زاد ربح الوحدة من س٢ عن ٦٠ جنيه.

ويمكن إجراء تحليل مشابه إذا إفترضنا بقاء ع ٢ = ٤٠ جنيه وتغيير قيمة ع ١ وفى هذه الحالة نجد أن :

$$-\frac{٣}{٢} = -\frac{ع_١}{٤٠} \qquad \text{أى أن } ع_١ = ٦٠$$

$$-\frac{١}{٢} = -\frac{ع_١}{٤٠} \qquad \text{أى أن } ع_١ = ٢٠$$

أى أنه طالما أن ٢٠ ≤ ع١ ≤ ٦٠ فإن الحل الحالى يظل حلاً أمثل .

وبصفة عامة فإنه طبقاً للمثال السابق فإن الحل الأصلى يظل أمثلا طالما كانت

$$-\frac{٣}{٢} < -\frac{ع_١}{ع_٢} < -\frac{١}{٢}$$

ويتغير إذا حدث خلاف ذلك.

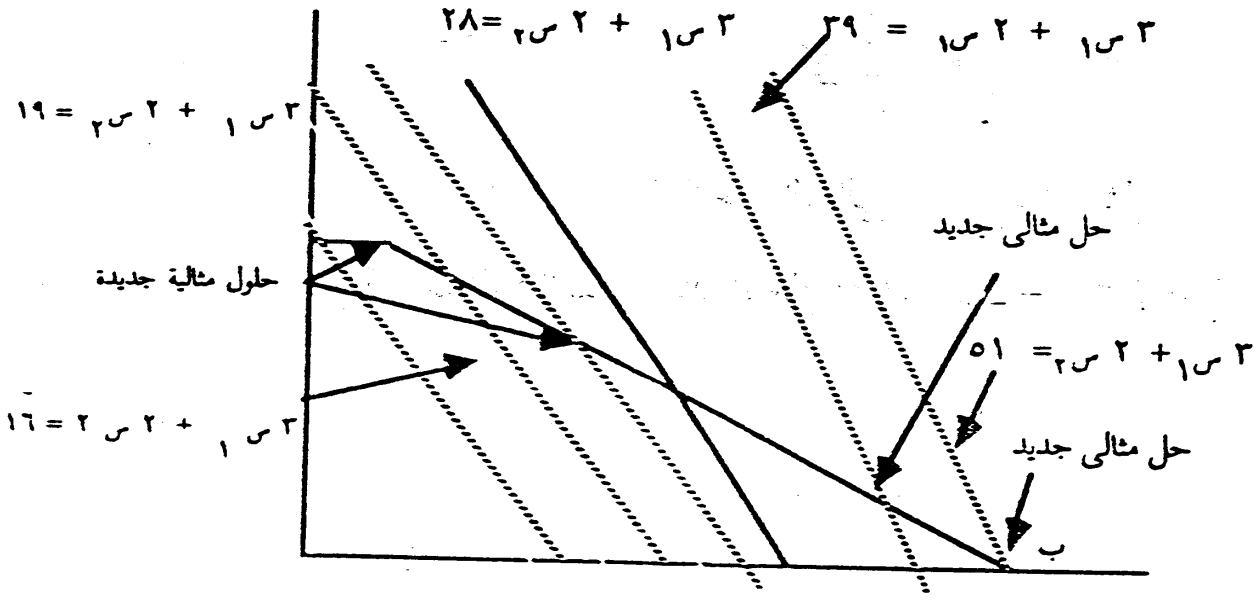
وعلى الرغم من أن مناقشتنا فى هذا المثال قد تركزت على التغير فى هوامش الربح فإنه يمكن إستخدام نفس الأسلوب بالنسبة لأى نوع من معاملات دالة الهدف.

٧-٢- ثانيا : أثر التغير فى كمية الموارد المتاحة :

يمكن أن يضيف تحليل حساسية نموذج البرمجة الخطية معلومات تفيد فى تحديد أثر زيادة أو نقص الكميات المتاحة من الموارد الإقتصادية. وقد سبق أن ذكرنا أن منطقة الحدود الممكنة تتحدد بالمنطقة التى تحدها القيود المختلفة للنموذج. وقد يؤدى تخفيض أو زيادة الكمية المتاحة من مورد معين الى تغيير مساحة منطقة الحدود الممكنة. وقد يؤدى بالتالى إلي تغيير الحل الأمثل. فإذا إفترضنا أن الكمية المتاحة من المورد الثانى قد زيدت لتكون ٥١ بدلاً من ٣٠ - إذن يكون القيد :

$$٣ س_{١} + ٢ س_{٢} \geq ٥١$$

ويؤدى ذلك إلي أن يصبح التعبير البيانى كما يلى :



ويتضح من الشكل أنه كلما زادت الكمية المتاحة من المورد الثانى فإن الحل الأمثل يستمر فى التغير إلي أن نصل إلى النقطة ب والتى يكون عندها القيد المعبر عن المورد هو $٣ س_{١} + ٢ س_{٢} \geq ٥١$. ولاتؤدى أى زيادة فى الكمية المتاحة بعد ذلك إلي تأثير على دالة الهدف ذلك أن

منطقة الحدود الممكنة لن يحدث عليها أى تغيير نتيجة هذه الزيادة. ويمكن أن يحدد الحل بيانيا عند أى قيمة يتخذها المورد الثانى.

ومن ناحية أخرى يؤثر إنخفاض الكمية المتاحة من المورد الثانى على الحل إلي أن نصل إلي كمية للمورد قدرها ١٦ والتى لايؤثر أى انخفاض بعدها على الحل ويمكن إجراء تحليل مشابه على القيد الأول والقيد الثالث.

ويمكن القول باختصار أنه يصحب أى زيادة أو نقص فى أحد الموارد (الفعالة) تغيير فى الحل طالما لم تتغير منطقة الحلول الممكنة. ولتحديد أقصى كمية يمكن أن يزيد بها أى من الموارد الفعالة يمكن أن نحرك الخط المعبر عن القيد موازيا لنفسه حتى نصل الى ركن جديد لمنطقة الحلول الممكنة. أى تغيير فى مورد غير فعال لن يؤثر على الحل إلا إذا كان كافياً لدرجة أن يصبح المورد فعالاً.

ومن الطبيعى أن يؤدى التغيير فى الكميات المتاحة من الموارد إلي تغيير فى القيم التى تتخذها متغيرات القرار. بالإضافة إلي ذلك قد يؤدى هذا التغير إلي تغيير فى قيمة دالة الهدف. وعلى سبيل المثال، كان الحل الأمثل للنموذج الأصلى هو س١ =٥ر٦ ، س٢ = ٥ر٢٥ وكان الربح فى هذه الحالة ٤٠٥ جنيه. فاذا افترضنا زيادة المورد الثانى بوحدة واحدة من ٣٠ إلي ٣١ فان الحل يتغيرليصبح س١ = ٧ ، س٢ = ٥ والذى يكون الربح عنده ٤١٠ جنيه. وتعتبر هذه الزيادة فى دالة الهدف وقدرها ٥ جنيهات هى مقياس المنفعة المترتبة على زيادة المورد الثانى بوحدة واحدة. ويطلق على مثل هذه القيمة (الزيادة فى قيمة دالة الهدف بزيادة المورد بوحدة واحدة) سعر الظل Shadow price. ويعتبر سعر الظل أحد المعلومات الهامة التى تستخدمها الإدارة فى إتخاذ القرارات. ويمكن على سبيل المثال – بمقارنة أسعار السوق بأسعار الظل – أن تحدد الإدارة ما إذا كان من الأفضل الحصول على وحدات إضافية من الموارد المختلفة.

٨- حل البرمجة الخطية بإستخدام جداول السمبلكس

تعتبر طريقة السمبلكس طريقة حسابية تتضمن عدد من الاجراءات التى يتم تطبيقها بطريقة منتظمة للبحث عن الحل الأمثل والذى يقع عند احد أركان منطقة الحلول الممكنه.

ويقصد «بالسمبلكس» فى مجال العلوم الرياضية ذلك الشكل الهندسى الذى تحده الخطوط المستقيمة من جميع الجوانب. وتعتبر منطقة الحلول الممكنه كما اتضح من الحل البيانى سمبلكس اذ أن حدودها الخارجية تتحدد بخطوط مستقيمة وتتحدد أركان منطقة الحلول الممكنه بالنقاط التى يتلاقى عندها خطان على حدود هذه المنطقة.

ويهمنا فى هذا المجال توضيح مايلى:

١- الأجراءات الواجب اتباعها للوصول للحل الأمثل بإستخدام طريقة السمبلكس.

٢- دلالات جدول الحل الأمثل.

٣- كيفية اجراء تحليل حساسية للنموذج.

٨-١- الاجراءات الواجب اتباعها للوصول للحل الأمثل :

سبق أن ذكرنا أن طريقة السمبلكس هى طريقة حسابية تتضمن عدد من الاجراءات التى يتم تطبيقها بطريقة منتظمة للبحث عن الحل الأمثل. وتتمثل هذه الاجراءات التى يجب اتباعها للوصول للحل الأمثل بإستخدام طريقة السمبلكس فى ثلاث خطوات كما يتضح من المناقشة التى تلى:

٨-١-١- خطوات طريقة السمبلكس:

يمر حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس فى عدد من الخطوات والتى تتمثل فى مايلى:

١ – حدد الحل المبدئى الأولى الممكن.

٢ – تحرك الى أقرب حل أفضل منه.

٣ – توقف عندما يكون أقرب حل ممكن هو الأفضل.

ولتوضيح خطوات الحل بإستخدام السمبلكس سوف يعتمد على نموذج البرمجه الخطية التالى مع افتراض أن س١ . س٢ تعبران عن عدد الوحدات من المنتج الأول والمنتج الثانى على التوالى وأن الطرف الأيسر يعبر عن الموارد المتاحة، وتعبر دالة الهدف عن الربح المباشرمن تشكيلة الانتاج.

نموذج البرمجة الخطية

عظم ز = ٣س١ + ٥س٢

فى ظل القيود التالية

س١	≤	٤
٢س٢	≤	١٢
٣س١ + ٢س٢	≤	١٨
س١ ≤ صفر.	س٢ ≤ صفر	

وفيما يلى توضيح لخطوات طريقة السمبلكس لغرض الوصول للحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الموضحة اعلاه.

الخطوة الأولى:

تحديد الحل المبدئى الممكن: حتى يمكن تحديد هذا الحل نتبع الخطوات الفرعية التالية:

(أ) نبدأ بتحويل المتباينات الى متساويات وذلك بإضافة المتغيرات العاطلة الخاصة بكل قيد وحيث أن كافة القيود المتعلقة بالنموذج الموضح

اعلاء قيود(≥) أى أقل من أو يساوى لذلك نضيف متغيرا عاطلا لكل قيد وليكن س٣ ، س٤ ، س٥ .

عظم ز = ٣س١ + ٥س٢

فى ظل س١ + س٣ = ٤

٢س٢ + س٤ = ١٢

٣س١ + ٢س٢ + س٥ = ١٨

س١ ، س٢ ، س٣ ، س٤ ، س٥ ≥ صفر

(ب) يتم اعادة كتابة النموذج ولكن مع معاملة دالة الهدف كأحد القيود بحيث يكون النموذج:

عظم ز

فى ظل ز − ٣س١ − ٥س٢ = صفر

س١ + س٣ = ٤

٢س٢ + س٤ = ١٢

٣س١ + ٢س٢ + س٥ = ١٨

ز ، س١ ، س٢ ، س٣ ، س٤ ، س٥ ≥ صفر

وبذلك نكون قد توصلنا الى الحل المبدئى الأول والذى يمكن قراءته من واقع المعادلات الآتية السابقة كما يلى:

ز = صفر ، س١ = صفر ، س٢ = صفر

س٣ = ٤ ، س٤ = ١٢ ، س٥ = ١٨

أى فى ظل هذا الحل أصبحت المتغيرات العاطلة وهى س٣ ، س٤ ، س٥ هى المتغيرات الاساسية فى الحل، أما س١ ، س٢ فهى متغيرات

غير أساسية فى الحل المبدئى الأول ولذلك أخذت قيمة صفر وبالتالى اصبحت قيمة دالة الهدف صفر، لان هذا يعنى أن كافة الموارد غير مستغلة على الاطلاق ولم يتم انتاج أى من المنتجين حتى الآن.

الخطوة الثانية:

نحاول باتباع خطوات السمبلكس الوصول إلى أفضل حل ممكن ويمكن أن يتم ذلك بإستخدام المعادلات الآنية الجبرية أو إستخدام جداول السمبلكس.

وفى كل مرة يجب اختبار امكانية الحل بمعنى أن تكون قيم كل المتغيرات اكبر من أو تساوى صفر، وكذلك مثالية الحل وذلك بإختبار ما اذا كانت كل قيم المتغيرات فى دالة الهدف موجبة أم لا. فإذا كان الحل ممكنا ولكن غير مثالى، بمعنى أن بعض المتغيرات مازالت تأخذ قيما سالبه فى دالة الهدف نستمر فى تكرار تلك الخطوة حتى نصل الى الحل الأمثل.

الخطوة الثالثة:

التوقف عندما يكون أقرب حل ممكن هو الافضل ويتم ذلك بإختبار آخر جدول حل يكون قد تم التوصل اليه فإذا كانت كل القيم فى الطرف الأيسر والتى تعبر عن قيم المتغيرات موجبه وكذلك اذا كانت كل قيم المتغيرات فى دالة الهدف موجبه نتوقف لاننا قد توصلنا الى الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية.

٨-١-٢- استخدام جداول السمبلكس للوصول للحل الامثل:

نتبع الخطوات السابقة بإستخدام جداول السمبلكس لانها اسهل فى خطوات الوصول للحل الامثل. وبتطبيق ذلك على نموذج البرمجة الخطية

الموضح أعلاه يمكن التعبير عن الحل المبدئى الممكن الأول الموضح فى المعادلات بعد اضافة المتغيرات العاطلة كما فى جدول السمبلكس الأول التالى:

جدول السمبلكس الأول

المتغيرات الاساسية	رقم المعادلة	المتغيرات					الطرف الأيسر
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	
ز	٠	-٣-	-٥-	٠	٠	٠	٠
س٣	١	١	٠	١	٠	٠	٤
س٤	٢	٠	٢	٠	١	٠	١٢
س٥	٣	٣	٢	٠	٠	١	١٨

يتضح من هذا الجدول أن قيمة دالة الهدف صفر وهذا أمر منطقى لان المتغيرين س١ ،س٢ لم يدخلا الحل بعد وبالتالى يكون قيمة كل منهما يساوى صفر اما المتغيرات الاساسية فى الحل فهى س٣ ، س٤ ،س٥

ويتم اختبار مدى امكانية ومثالية الحل حتى نحدد هل نتوقف أم لا كمايلى:

أ) **من ناحية إمكانية الحل**: حيث أن كل القيم فى الطرف الايسر موجبة فإن الحل ممكن.

ب) **من ناحية مثالية الحل**: حيث أن قيمة كل س١ ،س٢ سالبة فى **حالة الهدف** (-٣، -٥) **فإن الحل يكون غير مثالى ويمكن تحسين الحل بإدخال أى من** المنتجين **أو كليهما**

وحتى نتمكن من تحسين الحل لابد من اتباع بعض الخطوات الحسابية للتحرك الى أقرب حل ممكن أفضل منه. ويتم اتباع الخطوات التالية لغرض الوصول الى أقرب حل أفضل من الحل الذى تم التوصل اليه:

١ – تحديد المتغير الذى سيدخل الحل.

٢ – تحديد المتغير الذى سيخرج من الحل.

٣ – تعديل الجدول للوصول الى حل ثانى ممكن.

١ – تحديد المتغير الذى سيدخل الحل:

يتم اختيار المتغير ذا أكبر قيمة سالبه فى دالة الهدف كمرشح لدخول الحل وذلك لأنه يمثل اسرع طريق للوصول للحل الامثل. وذلك نظراً لأن إختيار أى من المتغيرات الاخرى ذات القيمة السالبة فى دالة الهدف سوف يؤدى الى التوصل للحل الامثل ولكن بمزيد من الجداول.

وفى هذا النموذج حيث أن $س_{٢}$ لها قيمة −٥ فى دالة الهدف وهى أكبر قيمة سالبة لذلك يتم اختيار $س_{٢}$ لدخول الحل وتمثل القيم الواردة فى عمود $س_{٢}$ عمود البؤرة.

٢ – أختيار المتغير الذى سيخرج من الحل:

لتحديد المتغير الذى سيخرج من الحل يتم تحديد ناتج قسمة القيم الواردة فى الطرف الايسر على القيم الموجبة فقط الواردة في عمود البؤرة ويتم إختيار أقل ناتج قسمة على أنه المتغير الذى سيخرج من الحل وذلك للمحافظة على استمرار امكانية الحل.

من جدول الحل المبدئى الاول

$$\frac{١٢}{٢} = ٦ \quad ، \quad \frac{١٨}{٢} = ٩$$

ويتم اختيار أقل ناتج قسمة حيث أنه أول متغير سيصل للصفر بزيادة المتغير الذى وقع عليه الاختيار للدخول الى الحل. أى حتى يظل الحل ممكن يتم اختيار س ٤ ليترك الحل.

ويطلق على الصف الخاص بالمتغير الذى سيخرج من الحل صف البؤرة ويطلق على نقطة التقاطع بين صف وعمود البؤره إصطلاح (البؤرة)

ويمكن توضيح الخطوتين (١)، (٢) على جدول الحل المبدئى الأول الممكن كما يلى:

المتغيرات الاساسية	رقم المعادلة	المتغيرات						الطرف الأيسر
		ز	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	
ز	صفر	-٣	-٣	-٥	.	.	.	.
س٣	-١	١	١	.	١	.	.	٤
س٤	-٢	.	.	٢	.	١	.	١٢
س٥	٢	٢	٢	٢	.	.	١	١٨

١٢/٢ = ٦ الأقل

١٨/٢ = ٩

ويتضح من الجدول أن العمود الخاص بالمتغير س ٢ يمثل عمود البؤرة حيث أنه يمثل المتغير الذى دخل الحل ويمثل الصف الخاص بالمتغير س ٤ صف البؤره وتتمثل البؤرة فى نقطة الالتقاء بين صف البؤرة وعمود البؤرة.

٣- الوصول الى جدول حل ممكن جديد تكون فيه الثلاثة اعمدة الأولى كما هى ولكن مع ادخال **س ٢ كمتغير** اساسى بدلا من **س ٤** ولذلك **لابد من تحويل معامل هذا المتغير الأساسى الى ١ وذلك**

بقسمة صف البؤرة بالكامل بما فيها الطرف الايسر على رقم البؤرة.
أى أن:

$$\text{صف البؤرة الجديد} = \frac{\text{صف البؤرة القديم}}{\text{رقم البؤرة}}$$

$$\frac{\text{صف البؤرة القديم}}{\text{رقم البؤرة}} = \frac{\cdot}{٢} \quad \frac{٢}{٢} \quad \frac{\cdot}{٢} \quad \frac{١}{٢} \quad \frac{\cdot}{٢} \quad \frac{١٢}{٢}$$

صف البؤرة الجديد $\cdot \quad ١ \quad \cdot \quad \frac{١}{٢} \quad \cdot \quad ٦$

وحتى يتم استبعاد المتغير الأساسى الجديد من المعادلات الاخرى ويتم تعديل كل صف من صفوف الجدول بما فيهم صف دالة الهدف، ماعدا صف البؤرة، وذلك بإستخدام المعادلة التالية:

الصف الجديد = الصف القديم − (معامل الصف القديم فى عمود البؤرة) × صف البؤرة الجديد

للوصول الى صف دالة الهدف الجديدعن طريق تطبيق المعادلة السابقة

صف دالة الهدف القديم (−٣ −٥ ٠ ٠ ٠ ٠)

− (−٥) (٠ ١ ٠ $\frac{١}{٢}$ ٠ ٦)

الصف الجديد = (−٣ ٠ ٠ $\frac{٥}{٢}$ ٠ ٣٠)

الصف رقم (١) لم يتغير لأن معاملة فى عمود البؤرة صفر

صف رقم (٣) القديم (٣ ٢ ٠ ٠ ١ ١٨)

− (٢) (٠ ١ ٠ $\frac{١}{٢}$ ٠ ٦)

الصف الجديد = (٣ ٠ ٠ −١ ١ ٦)

وهذا التغيير فى الصفوف يؤدى الى الوصول بجدول الحل الأولى الى الجدول الذى يليه كما يلى .

المتغيرات الاساسية	رقم المعادلة	المتغيرات						الطرف الأيسر
		ز	$س_1$	$س_2$	$س_3$	$س_4$	$س_5$	
ز	صفر	١	-٣	.	.	$\frac{٥}{٢}$	.	٣٠
$س_3$	١	.	١	.	١	.	.	٤
$س_2$	٢	.	.	١	.	$\frac{١}{٢}$	.	٦
$س_5$	٣	.	٣	.	.	-١	١	٦

$\frac{٤}{١}$ = ٤

$\frac{٦}{٣}$ = ٢ الأقل

ومن الجدول السابق نصل الى حل ممكن وهو

ز = ٣٠ $س_1$ = صفر، $س_2$ = ٦، $س_3$ = ٤، $س_4$ = صفر، $س_5$ = ٦

لتحديد ذلك نرجع الى قاعدة التوقف أو شرط المثالية وهو وجود كل القيم موجبة فى دالة الهدف وحيث أن معامل $س_1$ فى دالة الهدف مازال سالباً (-٣) فإن هذا الحل ليس مثاليا ويمكن تحسينه بإدخال $س_1$ للحل، $س_5$ بترك الحل حيث أنه يمثل أقل ناتج قسمة كمايلى:

بالنسبة للمتغير $س_3$ $\frac{٤}{١}$ = ٤ بالنسبة للمتغير $س_5$ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ وهى الأقل

باستخدام البؤرة وقيمتها (٣) يتم الوصول الى الصفوف الجديدة

صف البؤرة الجديد = $\frac{١}{٣}$ (٣ . . . -١ ١ ٦)

(١ . . . $-\frac{١}{٣}$ $\frac{١}{٣}$ ٢)

بالنسبة لتعديل صف دالة الهدف:

الصف القديم = (−٣ ٠ ٠ $\frac{٥}{٢}$ ٠ ٣٠)

− (٣) (١ ٠ ٠ $\frac{١}{٣}$ $\frac{١}{٣}$ ٢)

صف دالة الهدف الجديدة (٠ ٠ ٠ $\frac{٣}{٢}$ ١ ٣٦)

بالنسبة للصف الخاص بالمتغير الاساسى س٢

الصف القديم = (١ ٠ ١ ٠ ٠ ٤)

− (١) (١ ٠ ٠ $\frac{١}{٣}$ $\frac{١}{٣}$ ٢)

الصف الجديد = (٠ ٠ ١ $\frac{١}{٣}$ $-\frac{١}{٣}$ ٤)

صف س٢ كمتغير أساسى لم يتغير حيث أن معاملة فى عمود البؤرة صفر ولذلك يظهر جدول الحل بعد التعديل كمايلى:

المتغيرات الاساسية	رقم المعادلة	المتغيرات						الطرف الأيسر
		ز	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	
ز	صفر	١	٠	٠	٠	$\frac{٣}{٢}$	١	٣٦
س٣	١	٠	٠	٠	١	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$	٢
س٢	٢	٠	٠	١	٠	$\frac{١}{٣}$	٠	٦
س١	٣	٠	١	٠	٠	$-\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	٢

الحل الاساسى فى هذا الجدول هو

ز = ٣٦ س١ = ٢ ، س٢ = ٦، س٣ = ٢، س٤ = صفر، س٥ = صفر

وحيث أن كافة **القيم** فى الطرف الأيسر موجبة فأن الحل يكون ممكناً وحيث أن كافة القيم فى دالة الهدف موجبة فأننا نكون قد توصلنا للحل الأمثل، وبالتالى نتوقف **عن** إجراء أى عمليات حسابية أخرى.