النماذج والاساليب الكمية فى مجال الاعمال
" الجزء الثالث "

دكتور
بهاء الدين سعيد

مكتبة اكاديمية السادات للعلوم الادارية
١٩٩٨

النماذج والأساليب الكمية

في

مجال الأعمال

"الجزء الثالث"

كلية الإدارة
المكتبة بالمعادى
الرقم العام : ١٢٠٠٦
الرقم الخاص : ٦٥٨/٥٤
٩٨١٦

دكتور: بهاء الدين سعد
أستاذ إدارة الأعمال المساعد
كلية التجارة - جامعة حلوان

مكتبة الأكاديمية للدراسات العليا والبحوث الإدارية
١٩٩٨
ك/١٢٥٥
١

∴ − ٢ق٢ > − ٤

∴ ق٢ > ٢

وهذا يعنى فى التحليل الأخير أن ما يستهلكه المنتج الأول من وقت العملية (٢) يجب أن ينخفض بأكثر من دقيقتين ، حتى يصبح هذا المنتج مربحاً. أما كيف يتم هذا التخفيض ، فأمر يعالجه المختص بهذا المجال ، فى إطار النظام ذاته.

[٧−٢] أسلوب مقابل السمبلكس:

فى تحليل العلاقات بين الأولية والثنائية ، نلاحظ خاصية هامة تربط بينهما ، وهى ما تعرف بخاصية الحلول التكميلية [٥٠]، والتى نعنى بها أنه فى كل حل تكرارى للأولية يتسم بعدم الأمثلية، يقابله حل تكرارى فى الثنائية يتسم بعدم الإمكان. أى إذا كان جدول سمبلكس الأولية ، يظهر حلاً غير أمثل، فإن جدول السمبلكس المقابل له فى الثنائية يظهر حلاً غير ممكن ، والعكس بالعكس. وهذه الخاصية تفيد بأن إذا كان بالصف ح (أو أح − دح) ، قيم سالبة − فى حالة التعظيم −، بالنسبة للمشكلة الأولية ، فإن عمود الحل، فى الحل الثنائى المقابل، ينطوى على قيم سالبة. ويعنى الشق الأول من العبارة عدم أمثلية الحل الأولى ، بينما يعنى الشق الثانى عدم الإمكان.

وتستكمل الخاصية السابقة ، بخاصية أخرى ، وهى خاصية الحلول المثلى التكميلية [٥١] والتى تعنى أنه إذا كان الحل فى المشكلة الأولية ، أمثلاً ، فإنه يكون بالضرورة ممكناً فى الثنائية ، وعليه فإنه فى الحل التكرارى الأخير ، نصل بصورة مترامنة ، للحل الأمثل فى الأولية ، والحل الأمثل التكميلى فى الثنائية (والذى يقرأ من معاملات الصف أح − دح للمتغيرات الراكدة فى الحل الأمثل

للأولية). وبذلك يكون الصف (أح - دح) خالى من القيم السالبة فى الأولية ، كما أن عمود الحل ، فى الثنائية خالى هو الآخر من القيم السالبة.

والتفسير العلمى لهاتين الخاصيتين ، أن فى كل جدول تكرارى فى الأولية ، فإن معاملات الصف (أح - دح) للمتغيرات س ت ، فى معادلة الهدف، إنما تعادل الفرق بين الجوانب اليسرى ، واليمنى لقيود الثنائية المصاحبة لهذه المتغيرات. وفى حالة التعظيم ، فإن الجدول التكرارى فى الأولية لا يكون مثاليا عندما (أح - دح) > صفر ، لمتغير واحد على الأقل ، أما عند الأمثلية فإن أح ت -دح ت ≤ ٠ ، لكل المتغيرات س ت. وترجمة هذا الشرط ، من منظور الثنائية، إنما يعنى أن:

أح ت -دح ت = م ب ح ت-١ أى ت ص ى -دح ت

وهكذا ، عندما يكون أح ت - دح ت < ٠ ، فإن م ب ح ت-١ أى ت ص ى دح ت، وهكذا يدل على أنه إذا كان الحل الأولى غير مثالياً ، فإن الحل الثنائى المقابل ، يكون غير ممكناً.

ومن الناحية الأخرى ، عندما يكون أح ت -دح ت ≤ ٠.

فإن م ب ح ت-١ أى ت ص ى ≤ دح ت

وهذا يدل على أنه إذا كان الحل أمثلا للأولية ، فإنه يكون ممكناً للثنائية ، أو بكلمات أخرى ، أن الثنائية تصبح ممكنة ، عندما تصل الأولية إلى الأمثلية. (٥٢)

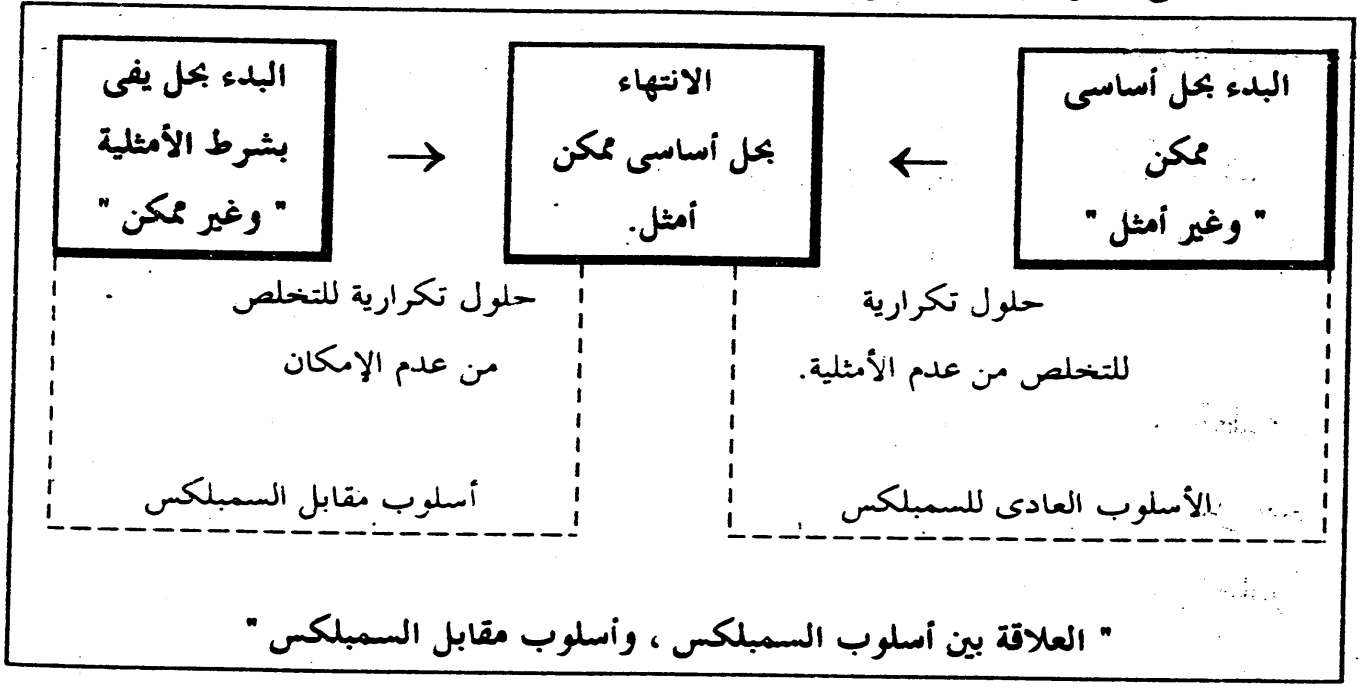
هذه النتائج أسفرت عن إيجاد أسلوب بديل لحل مشكلة البرمجة الخطية ، وهو الذى يسمى بأسلوب "مقابل السمبلكس". وهذا الأسلوب يبدأ بحل غير ممكن ، ولكنه ذو قيمة هدف أفضل من الحل الأمثل ، ثم يتم التحرك إلى الحلول الأساسية المجاورة ، سعياً وراء التخلص من عدم الإمكان ، مع الحفاظ دوماً على

الأمثلية فى كل حل تتابعى. وعليه فإنه مع كل حل تكرارى تتناقص الزيادة فى قيمة الهدف عند التعظيم ، (مقارناً بقيمة الهدف فى الحل الأمثل) ، بصورة تدريجية ، مع الاقتراب المتزامن إلى حيز الإمكان ، وعندما تهبط القيمة فى الهدف لتعادل قيمة الحل الأمثل ، فإن ذلك يقترن بأن يصبح الحل ممكناً. وعلى ذلك يمكن تصوير العلاقة بين الحلول الأساسية التكميلية للأولية والثنائية فى الشكل التالى: (٥٣)

هل الحل أمثلا ؟

	نعم	لا
نعم	أمثل	أقل من الأمثلية
لا	فوق الأمثلية	غير ممكناً وأقل من الأمثلية

كما أن العلاقة بين الأسلوب العادى للسمبلكس ، وأسلوب مقابل السمبلكس ، يوجزها الشكل التصويرى التالى:



" العلاقة بين أسلوب السمبلكس ، وأسلوب مقابل السمبلكس "

وعلينا الآن أن نجيب عن التساؤلات الثلاثة التالية:

أ. ما خطوات تطبيق مقابل السمبلكس ؟

ب. ما أوجه الإفادة من هذا الأسلوب ؟

جـ. ما حدود واشتراطات استخدامه ؟

وبخصوص السؤال أ – فإن أسلوب مقابل السمبلكس ، يتطلب البدء بحل تكون معاملات المتغيرات فى الصف (أح – دح) جميعها غير سالبة ، كما أن عمود الحل (الجوانب اليسرى للمعادلات) ينطوى على قيمة سالبة أو أكثر [لاحظ الأهمية المحورية للصف (أح – دح) ، وعمود الحل، فالأول يجيب عن التساؤل عن الأمثلية ، والثانى يجيب عن التساؤل عن الإمكان].

وعلى ذلك فإن الفرق الأساسى الجوهرى بين هذا الأسلوب ، وأسلوب السمبلكس العادى ، يتمثل فى بناء الحل المبدئى. حيث يلزم فى ظل مقابل السمبلكس أن نضرب كل القيود من النمط (≤) فى (-١) ، حتى يتسنى إيجاد المتغيرات الأساسية لهذه القيود. وطالما إننا نقبل فى ظل هذا الأسلوب أن تكون قيم كل أو بعض المتغيرات سالبة ، إذن تنتفى الحاجة إلى استخدام المتغيرات الوهمية ، ولكن يتم استخدام متغيرات الفائض ، كمتغيرات أساسية مبدئية ، والتى سيكون لها قيم سالبة (أى حل غير ممكن). بعد ذلك ، وفى سبيل الانتقال إلى حل أساسى مجاور ، علينا تعيين المتغير الأساسى الخارج وذلك الداخل. وهنا تبرز لنا أوجه الاختلاف التالية بين هذا الأسلوب ، وأسلوب السمبلكس العادى:

فأولاً، علينا فى ظل أسلوب المقابل أن نحدد المتغير الأساسى الخارج أولاً ، ثم نعين فى ضوئه المتغير الأساسى الداخل ثانياً ، وذلك على عكس أسلوب السمبلكس العادى. وهذا فرق منطقى طالما نسعى من غير الممكن إلى الممكن فى

مقابل السمبلكس ، ونسعى من غير الأمثل إلى الأمثل فى السمبلكس. وثانياً ، فعند تحديد المتغير الأساسى الخارج ، علينا أن نختار المتغير ذو القيمة الأكثر سالبية فى عمود الحل (وهو الأكثر خروجاً عن نطاق الإمكان). أما عند تعيين المتغير غير الأساسى الذى سيضم إلى مجموعة المتغيرات الأساسية ، فعلينا إيجاد النسب بين معاملات الصف (أح - دح) ومعاملات صف المتغير الأساسى الخارج (مع تجاهل النسب ذات المقام الصفرى أو الموجب) ، ومن ثم يكون المتغير الداخل هو صاحب القيمة المطلقة الأصغر ، وذلك إذا كانت المشكلة فى صورة تعظيم لدالة الهدف. أما إذا كانت المشكلة هى تدنية لدالة الهدف ، فعلينا اختيار المتغير ذو القيمة الموجبة الأدنى بين النسب ، ليكون بمثابة المتغير الأساسى الداخل. وهذا ، وإذا كان هناك تماثلاً بين المتغيرات المرشحة للخروج ؛ فيتم حل هذا التطابق عشوائياً. كما أنه إذا كانت مقامات النسب ذات قيم صفرية أو موجبة ، فإن المشكلة لا يكون لها حل ممكن.

وعند هذا الحد تنتهى الفروق بين مقابل السمبلكس العادى ، حيث ما يلى ذلك من خطوات يتماثل مع ما هو متبع فى العادة ، فى إيجاد قيم المتغيرات للجدول التالى وضرورة إيجاد مجموعة المتغيرات الأساسية المنعزلة ، بتطبيق قواعد الحذف الجاوسيانى. ونصل إلى الجدول النهائى لمقابل السمبلكس ، إذا أصبحت قيم كل المتغيرات فى عمود الحل غير سالبة، عندئذ نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل الممكن.

ونورد فيما يلى مثالاً لتوضيح الخطوات السابقة:

المثال التصويرى الخامس:

إذا كان لدينا البرنامج الخطى التالى:

[تدنية ح = ١٢٠٠ص١ + ٣٠٠٠ص٢ + ٣٦٠٠ص٣

فى ضوء: ص١ + ٢ص٢ + ص٣ ≤ ٣

ص١ + ٣ص٢ + ٤ص٣ ≤ ٤

ص١، ص٢، ص٣ ≤ ٠][٥٤]

وبتحويل هذا البرنامج الخطى إلى نظام معادلات ، نحصل على:

[تدنية ح = ١٢٠٠ص١ + ٢٠٠٠ص٢ + ٣٦٠٠ص٣

فى ضوء: ص١ + ٢ص٢ + ص٣ − ف١ = ٣ ..... (١)

ص١ + ٣ص٢ + ٤ص٣ − ف٢ = ٤ ..... (٢)

ص١، ص٢، ص٣، ف١، ف٢ ≤ ٠.

ولجعل كل من ف١، ف٢ بمثابة المتغيرات الأساسية فى المعادلتين (١)، (٢)، على التوالى ، نضرب كل معادلة فى (−١) ، لنحصل على:

−ص١ − ٢ص٢ − ص٣ + ف١ = −٣

−ص١ − ٣ص٢ − ٤ص٣ − ف٢ = −٤

وعلى ذلك يكون الحل المبدئى هو:

المتغيرات الأساسية	دح	١٢٠٠ ص١	٣٠٠٠ ص٢	٣٦٠٠ ص٣	٠ ف١	٠ ف٢	الحل
ف١	٠	−١	−٢	−١	١	٠	−٣
ف٢	٠	−١	−٣	−٤	٠	١	−٤
أح		٠	٠	٠	٠	٠	٠
أح − دح		−١٢٠٠	−٣٠٠٠	−٣٦٠٠	٠	٠	

ولتحديد المتغير الأساسى الخارج ننظر إلى عمود الحل ونختار القيمة الأكثر سالبية ، وعليه يكون ف٢ هو الصف القطب (فى حالة التطابق يتم الحل عشوائياً).

ولتحديد العمود القطب ، نوجد نواتج قسمة معاملات الصف (أح- دح) على المعاملات المناظرة للصف القطب كما يلى:

-١٢٠٠ \ -١ ، -٣٠٠٠ \ -٣ ، -٣٦٠٠ \ -٤ ، ٠ ، ١١٠

= [١٢٠٠ ، ١٠٠٠ ، ٩٠٠ ، ٠ ، ٠]

وطالما نحن بصدد مشكلة تدنية ، إذن نختار أدنى قيمة موجبة ، وهى ٩٠٠ ، وبذلك يكون العمود القطب هو ص٣. وعليه يكون الجدول الأول كما يلى:

الجدول الأول

المتغيرات الأساسية	دح	١٢٠٠	٣٠٠٠	٣٦٠٠	٠	٠	الحل
		ص١	ص٢	ص٣	ف١	ف٢	
ف١	٠	-٠,٧٥	-١,٢٥	٠	١	-٠,٢٥	-٢
ص٣	٣٦٠٠	٠,٢٥	٠,٧٥	١	٠	-٠,٢٥	١
أح		٩٠٠	٢٧٠٠	٣٦٠٠	٠	-٩٠٠	٣٦٠٠
أح - دح		-٣٠٠	-٣٠٠	٠	٠	-٩٠٠	

∴ الصف القطب هو ف١ (صاحب القيمة الأكثر سالبية فى عمود الحل).

أما العمود القطب ، فعلينا إيجاد النسب التالية:

[-١٣٠٠/١-٠,٧٥ ، -١٣٠٠/١-١,٢٥ ، ٠/١٠ ، ١/١٠ ، -١٩٠٠/١-٠,٢٥]

=[٤٠٠ ، ٢٤٠ ، ٠ ، ٠ ، ٣٦٠٠]

∴ القيمة الموجبة الأدنى ٢٤٠ ∴ ص٢ هـو المتغير المرشح للدخول ، ومن ثم يكون العمود ص٢ العمود القطب وبذلك يصبح الجدول الثانى كما يلى:

المتغيرات الأساسية	دح	١٢٠٠	٣٠٠٠	٣٦٠٠	٠	٠	الحل
		ص١	ص٢	ص٣	ف١	ف٢	
ص٢	٣٠٠٠	٠,٦	١	٠	-٠,٨	٠,٢	١,٦
ص٣	٣٦٠٠	-٠,٢	٠	١	٠,٦	-٠,٤	٠,٢-
أح		١٠٨٠	٣٠٠٠	٣٦٠٠	-٢٤٠	-٨٤٠	٤٠٨٠
أح - دح		-١٢٠	٠	٠	-٢٤٠	-٨٤٠	

طالما توجد قيم سالبة فى عمود الحل ، إذن ليس هذا هو الحل الممكن ، وبالتالى يكون المتغير الخارج هو ص٣ ، كما يكون المتغير الداخل هـو صاحب أدنى قيمة موجبة من النسب التالية:

[-١١٢٠/١-١,٢ ، ٠/١٠ ، ١/١٠ ، -٢٤٠/٠,٦ ، -٨٤٠/١-٠,٤]

=[١٠٠ ، ٠ ، ٠ ، -٤٠ ، ٢١٠]

وبما أن أدنى قيمة موجبة هى ١٠٠ ، ∴ العمود ص١ سيكون العمود القطب ، وعليه يصبح الجدول الثالث كما يلى:

المتغيرات الأساسية	دح	١٢٠٠ ص١	٣٠٠٠ ص٢	٣٦٠٠ ص٣	٠ ف١	٠ ف٢	الحل
ص٢	٣٠٠٠	٠	١	٣	١	١-	١
ص٣	١٢٠٠	١	٠	٥-	٣-	٢	١
أح		١٢٠٠	٣٠٠٠	٣٠٠٠	٦٠٠-	٦٠٠-	٤٢٠٠
أح - دح		٠	٠	٦٠٠-	٦٠٠-	٦٠٠-	

بما أنه لا توجد قيم سالبة فى عمود الحل ، أذن هذا هو الحل الممكن ، وهو بالضرورة الحل الأمثل ، حيث قيم الصف أح - دح ≥ ٠ ، (لاحظ أننا بصدد مشكلة تدنية).

أما فيما يتصل بالسؤال ب ، فإن أسلوب مقابل السمبلكس يحقق كل من وجهى الإفادة التاليين:

وجه الإفادة الأول ، أن هذا الأسلوب ، لا يدفعنا إلى استخدام المتغيرات الوهمية، وقد لاحظنا فى أسلوب السمبلكس العادى ، أنه يجب بذل جهد أساسى للتخلص من هذه المتغيرات الوهمية سواء فى ظل طريقة المرحلتين ، أو فى ظل طريقة م الكبرى. وبالطبع فإن مثل هذا الجهد غير مطلوب فى أسلوب مقابل السمبلكس ، وبالتالى فيصبح منطقياً توقع انخفاض عدد خطوات الحل التكرارية فى ظل هذا الأسلوب بالمقارنة بأسلوب السمبلكس العادى.

وجه الإفادة الثانى ، أن هذا الأسلوب ، يلعب دوراً هاماً فى تحليل الحساسية ، سواء أتصل الأمر بدالة تعظيم أو بدالة تدنية ، وخاصة إذا كنا بصدد قيد جديد بعد الوصول إلى الحل الأمثل للبرنامج الخطى ، وكان هذا القيد لا

يتوافق مع الحل الأمثل ، عندئذ يكون الحل أمثلاً ولكنه غير ممكن ، ومن ثم يكون مناسباً استخدام مقابل السمبلكس فى التخلص من عدم الإمكان.

أما بخصوص السؤال جـ ، فإن حدود واشتراطات تطبيق أسلوب مقابل السمبلكس ، تبرز كنتيجة منطقية لضرورة أن يكون الحل المبدئى ، مثالى ؛ أى أن معاملات المتغيرات فى الصف ح (أو أح - دح) تكون جميعاً ≤. فى حالة التعظيم ، أو تكون جميعاً ≥. فى حالة التدنية. وعلى ذلك إذا كنا بصدد مشكلة تعظيم ، وكانت معاملات المتغيرات فى دالة الهدف موجبة ، فإن قيم الصف ح أو (أح - دح) ستكون سالبة ، أى ≥. ، ومن ثم فالحل المبدئى لا يكون مثالياً، مما يتعارض مع متطلبات مقابل السمبلكس. وعلى ذلك فإنه فى مشاكل البرمجة الخطية المعيارية ، لا يكون من المناسب ، حلها من خلال أسلوب مقابل السمبلكس. ولكن بخصوص مشاكل التدنية حيث المتباينات فى صورة ≤ ، فإن استخدام مقابل السمبلكس يتسم بالكفاءة ، وتتجلى ميزته فى تخفيض عدد الخطوات المطلوبة ، للتوصل إلى الحل الأمثل الممكن.

ويمكن إيجاز أوجه الاختلاف الأساسية بين كل من أسلوب السمبلكس ، وأسلوب مقابل السمبلكس فى الجدول التالى:

	أسلوب السمبلكس	أسلوب مقابل السمبلكس
بناء الجدول المبدئى (الحل الأساسى المبدئى)	يجب أن يفى بشرط الإمكان (أى تكون قيم المتغيرات الأساسية ≥ 0).	يجب أن يفى بشرط الأمثلية (أى تكون قيم الصف ح $\leq$. فى حالة التعظيم ، أو تكون $\geq$. فى حالة التدنية).
هدف الحلول المتتابعة	السعى نحو تحقيق شرط الأمثلية	السعى نحو تحقيق شرط الإمكان
تعيين المتغير غير الأساسى المرشح للدخول.	هو صاحب القيمة الأكثر سالبية فى الصف (أح-دح) فى حالة التعظيم ، أو صاحب القيمة الموجبة الأعلى فى هذا الصف ، فى حالة التدنية.	هو صاحب أدنى قيمة موجبة بين نواتج قسمة معاملات الصف (أح -دح) على المعاملات المناظرة فى الصف القطب فى حالة التدنية ، أو صاحب القيمة المطلقة الأدنى لهذه النواتج فى حالة التعظيم.
تعيين المتغير الأساسى المرشح للدخول	هو صاحب أدنى قيمة موجبة من نواتج قسمة معاملات عمود الحل على المعاملات المناظرة بالعمود القطب.	هو صاحب القيمة الأكثر سالبية فى عمود الحل.
أسبقية التحديد بين المتغير الداخل والمتغير الخارج.	يحدد المتغير الأساسى المرشح للدخول أولاً ، ثم يعين المتغير الأساسى المرشح للخروج ثانياً	يحدد المتغير الأساسى المرشح للخروج أولاً ، ثم يعين المتغير الأساسى المرشح للدخول ثانياً.
جدول الأسلوب	يصلح لمعالجة كل مشاكل البرمجة الخطية.	يتفوق فى مشاكل البرمجة الخطية إذا كان الحل المبدئى يحقق شرط الأمثلية ، ولا يحقق شرط الإمكان. كما يصلح فى بعض حالات تحليل الحساسية.

مقارنة بين أسلوب السمبلكس ، وأسلوب مقابل السمبلكس

[٧-٣] تحليل ما بعد الأمثلية :

فى واقع الأمر إذا تم الاقتصار على الحل الأمثل الذى يقدمه البرنامج الخطى، فإن المعلومات عندئذ تكون محدودة القيمة وساكنة، حيث من الطبيعى تماماً أن نتوقع حدوث بعض الظروف التى لم تكن متوقعة عند بناء النموذج الأصلى، وتجعل الحل الأمثل الراهن عرضة بدورة للتغير، بل قد تجعله حلاً متقادماً. ومن هنا يأتى تحليل ما بعد الأمثلية، ليعطى القيم المثلى الراهنة حيوية جديدة وديناميكية فى ضوء هذه الظروف المستجدة. وعموماً فإن هذه الظروف المستجدة قد تؤثر فى مثالية الحل، أو قد تؤثر فى نطاق الإمكان. ويكون هدف تحليل ما بعد الأمثلية، هو التعرف على آثار هذه الظروف على الحل الراهن لكل من هاتين الحالتين.

[٧-٣-١] تحليل التأثيرات التى تطرأ على مثالية الحل الراهن :

قد يحدث بعد التوصل إلى الحل الأمثل للبرنامج الخطى، أن تظهر منافسة جديدة غير متوقعة تؤدى فى النهاية إلى ضرورة تعديل مساهمة الوحدة فى دالة الهدف كنتيجة منطقية لتخفيض الأسعار لمواجهة المنافسة، كما قد يحدث هذا التعديل فى مساهمة الوحدة فى دالة الهدف، إذا ارتفعت أسعار المواد الخام مثلاً بصورة لم تكن فى الحسبان. وفى جانب آخر، قد تقف الإدارة على أسلوب فنى جديد، يؤدى إلى تخفيض ما تستهلكه الوحدة المنتجة من الموارد المتاحة، أى يقع التغيير على معاملات الوحدة. ومن جانب ثالث، قد يلوح للإدارة فرصة تقديم منتج جديد يعتمد على الطاقات الراهنة. ويصبح السؤال لكل من هذه الحالات هو : هل مثل هذه المتغيرات، تحدث تغيراً جذرياً فى الحل الأمثل الراهن؟، وما

تأثير التغير فى هذه العناصر المستجدة على مثالية الحل الراهن؟. وفيما يلى بيان لكيفية القيام بمثل هذه التحليلات.

[٧-٣-١-١] تحليل التغيرات التى تطرأ على معاملات دالة الهدف :

عند تناولنا لتحليل حساسية معاملات دالة الهدف فى الطريقة البيانية، أوضحنا أن الهدف من هذا التحليل هو بيان إلى أى مدى يمكن أن تتغير قيمة معامل الهدف لأحد متغيرات القرار، ويظل الحل الأمثل على أمثلية. وعند تطبيق ذات المفهوم فى إطار السمبلكس يلزم أن نفرق بين تحليل حساسية معامل الهدف لمتغير أساسى فى الحل الأمثل، وبين تحليل حساسية معامل الهدف لمتغير أساسى، لأن الأول أكثر يسراً فى التناول من الثانى.

وفيما يتصل بتحليل حساسية معامل الهدف لمتغير غير أساسى فى الحل الأمثل، فإننا نستخدم الرمز Δ للتعبير عن التغير فى المعامل. ويصبح جهدنا منصباً على إجابة السؤال التالى " إلى أى مدى من القيم يمكن أن يتراوح Δ، بشرط الحفاظ على أمثلية الحل الراهن، وبافتراض بقاء كل البيانات الأخرى، للبرنامج الخطى كما هى ؟.

وإذا افترضنا أن س٣، كان بمثابة متغير قرار، وأسفر الحل الأمثل عن أن قيمته = صفر ، أو بكلمات أخرى، فإن س٣ كان متغير غير أساسياً فى الحل الأمثل، وإذا افترضنا أيضاً، أن معامل س٣ فى دالة الهدف هو (١٥)، فعلينا أن نتساءل : ما الأرقام التى سيطرأ عليها تغير، إذا ما أصبحت قيمة معامل س٣ فى دالة الهدف ($١٥+\Delta$)؟. علينا تذكر أنه طالما أن س٣، ليس من بين المتغيرات الأساسية فى الحل الأمثل، فلن يكون لهذا المتغير أى تأثير على معاملات المعادلات بالحل والممثلة للمتغيرات الأساسية، ولكن طالما س٣ فى الصف

(أح)، سيصبح (١٥+Δ)، فإن ذلك سيؤثر على قيمة العمود س٣، فى صف التقييم (أح–دح).، (أو فى الصف ح). ولا شيء خلاف ذلك. فإن افترضنا أن قيمة س٣ فى الصف أح هى (١٨)، فإن قيمة الصف (أح–دح) عندئذ تصبح [١٨ – (١٥+Δ)] أى [٣–Δ]. وعلى ذلك يتضح أن تغيير معامل س٣ فى دالة الهدف، قد أدى فقط إلى تغيير قيمة هذا المعامل فى الصف (أح–دح) (أو فى الصف ح)، وذلك جميعه بافتراض مشكلة تعظيم لدالة الهدف.

وطالما أننا نسعى لمعرفة مدى التغير فى Δ س٣، بحيث يظل الحل الأمثل، أمثلاً، فإن ذلك يتحقق عندما نحافظ على العلاقة التالية :

أن قيمة المتغير فى صف التقييم تظل ≤.

أى عندما : ٣– Δ ≤.

∴ – Δ ≤ -٣

∴ Δ + ٣ ≥

وهذا يعنى أن الحد الأقصى للزيادة المسموح بها، لمعامل س٣ فى دالة الهدف هو ٣ ، وستجد دوماً أن هذا الحد الأقصى ما هو إلا قيمة س٣ فى الصف (أح–دح)، (أو الصف ح)،فى الجدول الأمثل قبل أى تغيير أو اختبار للحساسية.

ومن الجانب الأخر، فطالما أننا بصدد تحليل حساسية معامل هدف لمتغير غير أساسى، فإن من المنطقى توقع أن الحد الأقصى للنقص فى هذا المعامل فى دالة الهدف لـ س٣ هو: ∝

ومن ثم فإن مدى الأمثلية لـ س٣ يكون:

[–∝ ≤ (د٣ = ١٥) ≤ ١٨]

أى يمكن أن ترتفع قيمة معامل س٢ فى دالة الهدف إلى ١٨، أو تنخفض دونما حد، ويظل الحل الأمثل الراهن محتفظاً بأمثلية.

أما إذا كانت المشكلة تدنية، فإن قيمة المعامل للمتغير غير الأساسى فى الصف (أح - دح) ستمثل الحد الأقصى للنقص ، بينما الحد الأقصى للزيادة سيكون ∞.

خلاصة القول، أنه إذا كنا بصدد تحليل حساسية معامل متغير غير أساسى فى دالة الهدف، فإننا سنعرف مباشرة الحد الأقصى لتغير هذا المعامل (فى حالة التعظيم)، والذى يتمثل فى قيمة هذا المتغير فى صف تقييم المثالية، كما أن الحد الأقصى للنقص يكون دونما حد. والعكس فى حالة التدنية.

أما **بخصوص تحليل حساسية معامل دالة الهدف لمتغير أساسى فى الحل الأمثل**، فمن الملاحظ أن تغير قيمة هذا المعامل، سيحدث التعديلات التالية :

أ - تغير قيمة المعامل فى الصف دح.

ب- تغير قيمة المعامل فى العمود دح.

جـ- تغير قيمة النتائج فى الصف أح لأعمدة هذا المتغير الأساسى محل التحليل، والمتغيرات غير الأساسية الأخرى.

د- تغير النتائج فى الصف (أح - دح) لعمود المتغير الأساسى محل التحليل، ولأعمدة المتغيرات غير الأساسية الأخرى.

هـ- تغير قيمة الهدف بالتبعية.

ولتوضيح أبعاد هذا الموقف سنعود إلى الحل الأمثل للمثال التصويرى رقم (٢)، حيث كان :

تعظيم ح = ٤س١ + ٦س٢

فى ضوء : ٢س١ + س٢ ≥ ١٠

س١ + س٢ = ٦

٣س١ + ٢س٢ ≤ ١٢

س١، س٢ ≥ ٠.

وكان الحد الأمثل كما يلى :

الأساس	دح	٤	٦	٠	-م	٠	-م	الحل
		س١	س٢	ك١	هـ١	ف١	هـ٢	
ك١	٠	٠	٠	١	١	١	-١	٤
س٢	٦	٠	١	٠	٣	١	-١	٦
س١	٤	١	٠	٠	-٢	-١	١	٠
أح		٤	٦	٠	١٠	٢	-٢	٣٦
أح - دح		٠	٠	٠	١٠+م	٢	-٢-م	

فإذا افترضنا أننا بصدد تحليل حساسية معامل س٢ فى دالة الهدف، بمعنى آخر، نود معرفة إلى أى مدى يمكن أن يرتفع المعامل (٦)، وإلى أى مدى يمكن أن ينخفض، ونظل مع ذلك محافظين على مثالية الحل. [لاحظ أننا لم نختر معامل س١ لمشكلة الاعتلال].

فإذا افترضنا أن د٢، تعبر عن معامل س٢ فى دالة الهدف، أى أن د٢ = ٦، فإننا نود معرفة الآثار المترتبة على (د٢ - Δ) أو (٦ + Δ)، والجدول التالى يوضح هذه التأثيرات :

الأساس	دح	٤	Δ+٦	٠	-م	٠	-م	قسمة الحل
		س١	س٢	ك١	هـ١	ف١	هـ٢	
ك١	٠	٠	٠	١	١	١	-١	٤
س٢	Δ+٦	٠	١	٠	٣	١	-١	٦
س١	٤	١	٠	٠	-٢	-١	١	٠
أح		٤	Δ+٦	٠	Δ+١٠	Δ+٢	-Δ-٢	Δ+٣٦
أح - دح		٠	٠	٠	م+Δ+١٠	Δ + ٢	م+Δ-٢-	

وعليك أن تلاحظ أن التغير الذى طرأ على الصف (أح - دح)، عبارة عن معاملات الصف (المعادلة) س٢ مضروبة فى Δ، ومضافة إلى القيم المثلى فى الصف (أح - دح)، حيث نجد أن :

	س١	س٢	ك١	هـ١	ف١	هـ٢	الحل
س٢	٠	١	٠	٣	١	-١	٦
(أح-دح) بعد التغير	٠	٠	٠		Δ+٢		Δ+٣٦

ولا يخفى أن هذه التغيرات هى نتيجة منطقية لتغير معامل س٢ فى العمود (دح)، بحكم كونه من متغيرات الأساس. وفى الواقع نحن فى حاجة إلى إعادة حساب أثر التغير فى معامل دالة الهدف للمتغير الأساسى، على قيم كل من هذا ذلك، فإن ما يعنينا هو ما يحدث للمتغير س٢ نفسه، وللمتغير ف١ كذلك.

إذن علينا، لكى نحافظ على مثالية الحل، أن نحافظ على العلاقة التالية، والظاهرة فى الصف (أح - دح) بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية (دون الوهمية منها) :

قيمة (أد- دح) المعدلة للمتغير ف١ : ٢ + Δ ≤.

$$\therefore \Delta \leq -٢$$

وهذا يمثل الحد الأقصى لانخفاض معامل س٢ فى دالة الهدف، وعليه يصبح الحد الأدنى لتغير معامل س٢ فى دالة الهدف = ٦ - ٢ = ٤.

أما الحد الأقصى لتزايد معامل س٢ فى دالة الهدف فهو ∞ [لاحظ أن س٢ هو متغير القرار الوحيد ذو القيمة الموجبة، فى مجمل المتغيرات الأساسية].

وعلى ذلك، فإن مدى الأمثلية لـ د٢ يصبح :

[٤ ≤ (د٢ = ٦) ≤ ∞].

وإذا رجعنا إلى المثال التصويرى رقم (١) حيث كان البرنامج :

ح = ٩ س١ + ٧ س٢

فى ضوء : ٢ س١ + س٢ ≤ ١٠

٤ س١ + ٥ س٢ ≤ ٤٠

س١، س٢ ≤ .

وكان الحل الأمثل كما يلى :

الأساس	دح	٩	٧	٠	٠	الحل
		س١	س٢	س٣	س٤	
س١	٩	١	٠	٦\٥	-٦\١	٣\٥
س٢	٧	٠	١	-٣\٢	٣\١	٣\٢٠
أح		٩	٧	٦\١٧	٦\٥	٣\١٨٥
أح - دح		٠	٠	٦\١٧	٦\٥	

فعلينا أن نتعرف أولاً على مدى أمثلية معامل س١ فى دالة الهدف (أى مدى أمثلية د١). ثم نتعرف ثانياً، على مدى أمثلية معامل س٢ فى دالة الهدف.

فبالنسبة لـ د١، فإن قيمة كل من س٣، س٤، فى الصف (أح - دح)، ستصبح كما يلى عندما يتغير د١ من ٩ إلى (٩ + Δ) :

	س١	س٢	س٣	س٤	الحل
∴ معاملات س١ المثلى	١	٠	٦\٥	-٦\١	٣\٥
∴ عاملات الصف (أح - دح) بعد التغير	٠	٠	٦\١٧ +Δ٦\٥	٦\٥ - Δ ٦\١	٣\١٨٥ + Δ٣\٥

القيمة المعدلة لـ س٣ = ٦\١٧ + Δ ٦\٥

القيمة المعدلة لـ س٤ = ٦\١٧ + Δ ٦\٥

ولكى يظل الحل مثالياً، فيجب أن تكون :

٣ = ٦\١٧ + Δ ٦\٥ ≥ ٠

٦\٥ + Δ ٦\١ ≥ ٠

ومن العلاقة الأولى، نجد أن : Δ ٦\٥ ≥ -٦\١٧ ∴ Δ ≥ -٥\١٧

ومن العلاقة الثانية، نجد أن : - Δ ٦\١ ≥ -٦\٥ ∴ Δ ≤ ٥

وتشير العلاقة الأولى إلى أن الحد الأقصى لتخفيض معامل س١ فى دالة الهدف هو ٥/١٧، بينما الحد الأقصى لزيادة هذا المعامل هو ٥. وعلى ذلك، فإن مدى الأمثلية لمعامل س١ فى دالة الهدف هو : [٥/٢٨ ≤ (د١ = ٩) ≤ ١٤]

أما بالنسبة لـ د٢، فإن قيمة كل من س٣، س٤، فى الصف (أح - دح) ستصبح كما يلى إذا ما تغير د٢ من ٧ إلى (٧ + Δ) :

	س١	س٢	س٣	س٤	الحل
∴ معاملات س٢	٠	١	-٣\٢	٣\١	٣\٢٠
∴ عاملات الصف (أح - دح) بعد التغير	٠	٠	٦\١٧ - Δ٣\٢	٦\٥ + Δ٣\١	٣\١٨٥ + Δ٣\٢٠

القيمة المعدلة لـ س٣ فى (أحَ - دح) = ٦\١٧ - Δ ٣\٢

القيمة المعدلة لـ س٤ فى (أح - دح) = ٦\٥ - Δ ٣\١

وللحفاظ على مثالية الحل، يجب أن يكون :

٦\١٧ - Δ ٣\٢ ≥ ٠ ، ٦\٥ + Δ ٣\١ ≥ ٠

ومن العلاقة الأولى : ∴ - Δ ٣\٢ ≥ - ٦\١٧ ∴ Δ ≤ ٤\١٧

ومن العلاقة الثانية : ∴ - Δ ٣\١ ≥ - ٦\٥ ∴ Δ ≥ -٦\١٥

وتشير العلاقة الأولى، إلى أن الحد الأقصى لتزايد معامل س٢ فى دالة الهدف هو ٤/١٧، بينما تشير العلاقة الثانية، إلى أن الحد الأقصى لانخفاض معامل س٢ فى دالة الهدف هو ٦/١٥.

وبذلك، فإن مدى الأمثلية لمعامل س٢ فى دالة الهدف هو :

(٧ - ٦\١٥) ≤ (د٢ = ٧) ≤ (٧ + ٤\١٧)

[٢\٩ ≤ (د٢ = ٧) ≤ ٤\٤٥].

ونود أن نشير إلى أنه عند تعدد المتغيرات غير الأساسية (خلاف الوهمى منها)، فسيكون أمامنا عدة علاقات، يمثل بعضها الحدود القصوى للتغير، ويمثل البعض الآخر، الحدود الدنيا للتغير. ولما كان الحد الأقصى أو الأدنى لـ Δ محل التحليل، يجب أن يتوافق مع كل العلاقات، إذن يتوجب علينا اختيار أدنى

الحدود القصوى، ليمثل الحد الأقصى للتغير، كما علينا اختيار الحد الأدنى الأكثر تقييدا من بين الحدود الدنيا (أى صاحب القيمة الأقل سالبية لـ Δ).

وعلى سبيل التوضيح، إذا كانت المتغيرات غير الأساسية وغير الوهمية هى س٣، س٥، س٦ وكانت أقصى زيادة ممكنة هى [١٢، ٨، ٩]، أذن القيمة المختارة للتغير هى Δ= ٨. كما أنه إذا كان أقصى تخفيض ممكن هو[٤-، ١١-، ١-]، فإن القيمة المختارة هى Δ= ١-.

وبذلك يمكننا **إيجاز الطريقة العامة فى تحليل حساسية معاملات دالة الهدف**، فيما يلى :

(١)نضيف التغير Δ لمعامل المتغير الأساسى محل التحليل فى جدول الحل الأمثل فى كل من عمود وصف المتغير.

(٢)نعيد حساب، قيم الصف ح، وكذلك الصف (أح - دح)، ولذلك لكل متغير غير أساسى وغير وهمى.

(٣)للحفاظ على مثالية الحل، نجعل قيم المتغيرات غير الأساسية الجديدة ≤.

(٤)العلاقة التى تسفر عن Δ ≥ قيمة موجبة، تمثل أقصى زيادة مسموح بها فى معامل المتغير محل التحليل، بينما العلاقة التى تسفر عن Δ ≤ قيمة سالبة، إنما تمثل أقصى تخفيض مسموح به، فى معامل المتغير محل التحليل.

(٥)عندما تتعدد كل من الزيادات القصوى أو التخفيضات القصوى، علينا اختيار الأكثر تحديدا لمدى التغير فى كل منهما، أى يصبح :

[أكبر الحدود الدنيا ≤ Δ ≤ أقل الحدود القصوى].

والآن ماذا علينا أن نفعل، لو أن التغير فى معامل دالة الهدف لأحد المتغيرات الأساسية، كان خارجاً عن المدى المحدد للأمثلية ؟

إن الإجابة هى أن الحل الأمثل، لن يبقى علي مثاليته. ولمعرفة الحل الأمثل الجديد فى ظل هذا التغير، علينا إدخال Δ فى كل عمود وصف دح، على الحل الأمثل الراهن، ثم إعادة حساب قيم الصف أح ، والصف (أح- دح)، وقيمة الربح من جديد. وبالرغم من أننا لا نعلم عدد الخطوات التتابعية المطلوبة للتوصل إلى الحل الأمثل الجديد، إلا أن هذه الخطوات ستكون أقل بالضرورة، من تلك المطلوبة إذا بدأنا من الحل الأساسى المبدئى، أى إذا عالجنا المشكلة المعدلة، على أنها برنامج خطى جديد.

فإذا افترضنا على سبيل التوضيح أن معامل س١ (فى المثال التصويرى الأول)، قد أرتفع من ٩ إلى ١٦ فإن الجدول الراهن الأمثل سيصبح كما يلى فى ظل هذا التغير :

الأساس	دح	١٦	٧	٠	٠	الحل
		س١	س٢	س٣	س٤	
س١	١٦	١	٠	٦\٥	٦\١-	٣\٥
س٢	٧	٠	١	٣\٢-	٣\١	٣\٢٠
أح		١٦	٧	٦\٥٢	٣\١-	٣\٢٢٠
أح -دح		٠	٠	٦\٥٢	٣\١-	

وبذلك يتضح أننا بصدد حل غير أمثل، وعلينا لإعادة الأمثلية تحديد المتغير غير الأساسى الداخل والمتغير الأساسى الخارج، ومن ثم نحصل على الجدول التالى :

س١	١٦	١	٠,٥	٠,٥	٠	٥
س٤	٠	٠	٣	٢-	١	٢٠
أح		١٦	٨	٨	٠	٨٠
أح - دح		٠	١	٨	٠	

∴ لا توجد قيم سالبة فى الصف (أح -دح)، إذن هذا هو الحل الأمثل الجديد، حيث مجموعة الحل (س١، س٢، س٣، س٤) = (٥، ٠، ٠، ٢٠)، ح المثلى = ٨٠.

لاحظ أن عدد جداول إعادة الأمثلية، أقل بالضرورة من عدد الجداول اللازمة لحل البرنامج الخطى إبتداءاً، من أجل الوصول للحل الأمثل الجديد.

[٧-٣-١-٢] تحليل آثار تغيير معدلات استخدام الوحدة لمتغير على أمثلية الحل:

إن التغير فى معدل الاستخدام لمتغير قرار ما، من الموارد، يؤثر فقط فى مثالية الحل، طالما أنه يؤثر فى الجانب الأيمن لقيد الثنائية المصاحب لهذا المتغير. وهذا القول نقصره على متغيرات القرار غير الأساسية فى الحل الأمثل، وذلك لأن التغير فى معاملات القيود، للمتغيرات الأساسية، سوف يؤثر فى مصفوفة المقلوب، مما ينجم عنه، تعقيدات فى الحسابات. ولذلك، فإن الطريقة الأيسر فى تناول التغيرات فى معاملات المعادلات الممثلة لمتغيرات قرار أساسية، هى حل المشكلة، باعتبارها مشكلة جديدة فى ظل هذا التغير (ويلاحظ أن هناك طرق لتناول المتغيرات فى معاملات صف واحد، يمثل متغير قرار أساسى، ألا أن مستوى المعلومات المتحصل عليها، أقل جودة من تلك المتحصل عليها من طرق تحليل الحساسية الأخرى). (٥٦)

أما فيما يتصل بالمتغير غير الأساسى، فنورد المثال التالى، لبيان كيفية إجراء تحليل الحساسية، إذا ما تغير معدل استهلاك هذا المتغير من الموارد المتاحة:

البرنامج الأولى	تعظيم ح = ٤س١ + س٢ فى ضوء: س١ + ٢س٢ ≤ ٦ ٢س١ + س٢ ≤ ٨ −س١ + س٢ ≤ ١ س٢ ≤ ٢ س١، س٢ ≥ ٠	البرنامج الثانى	تدنية ح= ٦ص١ + ٨ص٢ + ص٣ + ٢ص٤ فى ضوء: ص١ + ٢ص٢ − ص٣ ≥ ٤ ٢ص١ + ص٢ + ص٣ + ص٤ ≥ ١ ص١، ص٢، ص٣، ص٤ ≥ ٠

ولما كان الحل الأمثل، هو :

الأساس	المعاملات						الحل
	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	
ح	٠	١	٠	٢	٠	٠	١٦
س٣	٠	١,٥	١	−٠,٥	٠	٠	٢
س١	١	٠,٥	٠	٠,٥	٠	٠	٤
س٤	٠	١,٥	٠	٠,٥	١	٠	٥
س٦	٠	١	٠	٠	٠	١	٢

حيث نلاحظ أن س٢ هو متغير قرار غير أساسى، وسنفترض الآن أن معاملات هذا المتغير ستصبح (٣،٤) فى القيدين الأول والثانى، بدلاً من (١، ٢) : وعلى ذلك فإن قيد الثنائية المصاحب، سيكون :

٤ص١ + ٣ص٢ + ص٣ + ص٤ ≤ ١

[لاحظ أن الجانب الأيسر، يعادل قيمة معامل س٢ فى دالة الهدف].

وطالما أن معادلة الهدف لن يلحق بها تغير، فإن قيم الثنائية ستظل كما هى كذلك. وعليه يصبح معامل س٢ الجديد = القيم اليمنى لقيد الثنائية − قيمة المتغير فى دالة الهدف.

∴ معامل س٢ الجديد = ٤ (٠) + ٣ (٢) + ١ (٠) + ١ (٠) −١ = ٥

[تذكر أن القيم المثلى للمتغيرات ص١، ص٢، ص٣، ص٤، هى تلك الخاصة بالمعاملات س٣، س٤، س٥، س٦، فى الصف ح، بالحل الأمثل للأولية، وعلى التوالى]. ولما كان معامل س٢ الجديد ≤ صفر، فإن التغير المفترض لن يؤثر فى الحل الأمثل.

[٧-٣-١-٣] تحليل آثار إضافة متغير جديد (٥٧) :

يمكن تناول هذا التحليل من خلال التصور التالى : إن إضافة متغير جديد (نشاط جديد)، يمكن النظر إليه على أنه متغير غير أساسى، موجود فى البرنامج الأصلى، وجميع معاملاته صفرية سواء فى دالة الهدف أو فى القيود. وعلى ذلك فإن معاملات هذا المتغير الجديد سوف تمثل التغير من الصفر إلى القيم الجديدة.

فإذا افترضنا فى البرنامج الأولى الوارد فى البند السابق (مع تعديل ح لتصبح ٣س١ + ٢س٢)، فإن الجدول الأمثل سيكون كما يلى :

الأساس	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٥	الحل
ح	٠	٠	٣١١	٣١٤	٠	٠	٣١٣٨
س٢	٠	١	٣١٢	-٣١١	٠	٠	٣١٤
س١	١	٠	-٣١١	٣١٢	٠	٠	٣١١٠
س٥	٠	٠	-١	١	١	٠	٣
س٦	٠	٠	-٣١٢	٣١١	٠	١	٣١٢

فإذا كنا معينون بإدخال متغير إضافى س٧، والذى تستهلك الوحدة منه (٠,٧٥ وحدة) من طاقتى الموردين الأول والثانى، كما أن مساهمة الوحدة من هذا المتغير فى دالة الهدف هى ١,٥، وعليه فإن البرنامج الخطى الأولى سيصبح كمايلى : [لاحظ أن القيد الثالث يعبر عن العلاقة بين س١، س٢، وستظل هذه العلاقة حاكمة، بالشكل الذى يظهره هذا القيد، فى مقابل وضعه قبل التغير].

تعظيم : ح = ٣س١ + ٢س٢ + ١,٥ س٧

فى ضوء : س١ + ٢س٢ + ٠,٧٥س٧ ≤ ٦

٢س١ + س٢ + ٠,٧٥س٧ ≤ ٨

-س١ + س٢ - س٧ ≤ ١

س٢ ≤ ٢

س١، س٢، س٧ ≥.

إن إضافة المتغير الجديد س٧، يعنى التـ المزدوج للتغير فى كل من دالة الهدف، ومعدلات الاستخدام للموارد. ولقد نظرنا إلى س٧، وكأنه جزء من النموذج الأصلى، وله معاملات صفرية، والتى تغيرت، كما هو وارد فى البرنامج الآنف ذكره. وهذا التصور يعادل القول بأن المتغير س٧ هو متغير غير أساسى.

وأول شىء يتسنى لنا عمله هو اختبار قيد الثنائية المصاحب، حيث:

٠,٧٥ص١ + ٠,٧٥ ص٢ - ص٣ ≤ ١,٥

وطالما أن س٧، ينظر إليه كمتغير غير أساسى، فى الجدول الأصلى، فإن قيم الثنائية ستظل دونما تغيير.

وعلى ذلك، فإن معاملات س٧ فى الجدول الأمثل الحالى، هى:

(٠,٧٥) (٣١١)+(٠,٧٥) (٣١٤) -(١) (٠) - ١,٥ = - ٤١١

وهذا يعنى أ ن الحل الراهن، سوف يتحسن إذا أصبح س٧ موجبا.

والحل الأمثل الراهن سوف يتم تعديله من خلال إيجاد عمود جديد للمتغير س٧ بالجانب الأيمن بمعامل= -٤١١فى معادلة الهدف. ومن ثم، فإن معاملات القيد المصاحب تحسب كما يلى :

$$\begin{bmatrix} ٠,٢٥ \\ ٠,٢٥ \\ -١ \\ -٠,٢٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٧٥ \\ ٠,٧٥ \\ -١ \\ صفر \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣١٢ & -٣١١ & ٠ & ٠ \\ -٣١١ & ٣١٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & ١ & ١ & ١ \\ -٣١٢ & ٣١١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

ومن ثم، فإن قيمة س٧ فى دالة الهدف ستعادل =

[(٠,٢٥) (٢) + (٠,٢٥) (٣) + (-١) (٠) + (-٠,٢٥) (٠)] -[١,٥]

=[٠,٥+٠,٧٥-١,٥]=-٠,٢٥

وعليه فإن الحل ليس بأمثل، ولإعادة الأمثلية نعد جداول التكرار التالية :

التكرار الأساسى

الأساس	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	الحل
ح	٠	٠	٣\١١	٣\١٤	٠	٠	-٠,٤٥	٣\٣٨
س٢	٠	١	٣\١٢	-٣\١٠	٠	٠	٠,٢٥	٣\١٤
س١	١	٠	-٣\١١	٣\١٢	٠	٠	٠,٢٥	٣\١٠
س٥	٠	٠	-١	١	١	٠	-١	٣
س٦	٠	٠	-٣\١٢	-٣\١١	٠	١	-٠,٢٥	٣\١٢

التكرار الأول والأمثل

الأساس	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	الحل
ح	٠	١	١	١	٠	٠	٠	١٤
س٧	٠	٤	٣\٨	-٣\١٤	٠	٠	١	٣\١٦
س١	١	-١	-١	١	٠	٠	٠	٢
س٥	٠	٤	٣\٥	-٣\١٠	١	٠	٠	٣\٢٥
س٦	٠	١	٠	٠	٠	١	٠	٢

وعليك أن تلاحظ أن المتغير (النشاط) الجديد، لا يمكن إدماجه فى الحل، ألا أن كان سيؤدى إلى تحسين دالة الهدف (ومن الواضح أن قيمة الهدف كانت ٣/٣٨ قبل إدخال المتغير المقترح، ثم أصبحت ١٤ بعد إدخال المتغير فى الجدول الأمثل). وهذه النتيجة، مناقضة - كما سنرى - لعملية إضافة قيد جديد، لأن هذا الأخير لا يمكن أبداً أن يحسن من قيمة الهدف، بل إذا كان القيد الإضافى حاكماً فإن قيمة ح المثلى ستتأثر سلباً.

[٧-٣-٢] تحليل التأثيرات التى تطرأ على نطاق الإمكان :

إن الإمكان يتعرض للتأثر وفقاً لنوعين أساسيين من التغير. الأول هو تغيير فى الموارد المتاحة، أى تغيير الجوانب اليسرى للمعادلات. الثانى، هو إضافة قيد جديد، للقيود الحالية. وكل من هذين التغيرين يحدث بعد التوصل إلى الحل الأمثل للبرنامج الأصلى. ونتناول تحليل كل نوع على التتالى.

[٧-٣-٢-١] تحليل حساسية التغير فى الموارد المتاحة :

إن التغير فى قيمة مورد ما، إنما يعنى تعديل فى الجانب الأيسر للقيد المعبر عن هذا المورد. فالتغيير بالزيادة يفيد بيانياً انتقال خط القيد إلى آخر موازى

للخارج عن نطاق الإمكان الراهن. ولا يخفى أن تغير نطاق الإمكان، قد يؤدى إلى تغير فى المزيج الأمثل. ولذلك فإن تحليل حساسية الموارد (الطاقات)، تستهدف التعرف على المدى الذى يمكن أن تتغير خلاله قيمة المورد، ويظل الحل الأساسى ممكناً. ولتوضيح كيفية المعالجة علينا أن نفرق مبدئياً، بين القيود الحاكمة وتلك غير الحاكمة. فالقيد الحاكم، هو ذلك القيد الذى يكون متغيره الراكد، معادلاً للصفر، ومن ثم تكون طاقة المورد مستغلة بالكامل. أما القيد غير الحاكم ، فهو الذى يكون لمتغيره الراكد قيمة موجبه، مما يفيد وجود طاقة من المورد غير مستغلة عند الحل الأمثل. وسنبدأ أولاً، **بتحليل طاقة قيد حاكم** ، والذى نتعرف على صفته من خلال النظر إلى المتغير الراكد (أو الفائض) المعبر عن القيد، فى عمود المتغيرات الأساسية، فإن لم يظهر بها هذا المتغير الراكد (أو الفائض)، فإن قيمته هى الصفر، ومن ثم فهو يمثل قيد حاكم. أما إن كان المتغير الراكد (أو الفائض) الممثل للقيد، مندرج فى متغيرات الأساس، فسيكون له قيمة موجبة، وهذا يفيد أن المورد الذى يمثله هذا المتغير غير مستغل، ومن ثم فهو قيد غير حاكم.

وإذا عدنا **للمثال التصويرى رقم (١)** ، سنجد أن متغيرات الأساس بالحل الأمثل، لا تشتمل على المتغيرين الراكدين (س٣، س٤)، ومن ثم فنحن بصدد قيدين حاكمين. وإذا تناولنا تحليل حساسية القيد الأول، فإننا نود اختبار تأثير زيادة طاقة هذا القيد من (١٠) إلى (١٠ + Δ)، وبافتراض ثبات كل بيانات البرنامج الخطى الأخرى. فإذا كانت زيادة طاقة القيد الأول، إنما تعنى تخفيض قيمة المتغير الراكد الممثل له (س٣). فإن القول بزيادة طاقة المورد الأول (ط١) من (١٠) إلى (١٠ + Δ)، إنما يناظر القول، بالاحتفاظ بقيمة ط١ عند قيمتها الراهنة، مع تخفيض الحد الأدنى للمتغير العاطل س٣ من صفر إلى (−Δ).

[فعلى سبيل المثال، فإن زيادة ط١ من ١٠ إلى ١٤، إنما هو نفس القول بأن س٣ تخفض قيمته من صفر إلى -٤]. وفى ضوء هذه الملاحظة، يمكننا التعرف على أثر زيادة ط١ من ١٠ إلى (١٠ + Δ)، على الحل الأمثل، من خلال الإجابة عن السؤال التالى :

ما الأثر على الحل الأمثل، الناتج من تخفيض الحد الأدنى لـ س٣ من صفر إلى (-Δ)، بافتراض بقاء ثبات كل بيانات البرنامج الخطى الأخرى ؟.

بالنظر إلى الصف (أح - دح)، سنجد أن معامل س٣ هو ٦\١٧، وهو يشير إلى أن قيمة الهدف تتناقص بمعدل ٦\١٧، مقابل كل وحدة إضافية من س٣، أو بكلمات مقابلة، فإن قيمة الهدف المثلى تتزايد بمعدل ٦\١٧ مقابل كل وحدة نقص فى س٣. وعلى ذلك، فإن تخفيض س٣ من صفر إلى (-Δ)، سيكون له الأثر التالى على قيمة الهدف المثلى :

{ قيمة الهدف المثلى بدلالة التغير =

القيمة المثلى الراهنة لدالة الهدف + [معامل س٣فى الصف (أح - دح)× Δ]

= ٣\١٨٥ + (٦\١٧ Δ)

وإذا كان سعر الظل هو معدل التحسين فى قيمة الهدف المثلى، لكل وحدة إضافية لطاقة القيد، فإن معامل Δ فى قيمة الهدف بدلالة التغير، هو بالضبط سعر الظل لطاقة المورد الأول.

وبعد معرفة أثر نقص س٣ من صفر إلى (-Δ) على القيمة المثلى للهدف، علينا التعرف على أثر هذا النقص على القيم المثلى للمتغيرات الأساسية الراهنة، مقابل كل وحدة تخفيض فى س٣. وهذا الأثر يقابل بالدقة القول، بأن معاملات عمود س٣ بالجدول الأمثل، إنما تمثل معدل الزيادة فى قيم المتغيرات الأساسية،

لكل وحدة نقص فى س٢. ولذلك فإن تناقص س٢ من صفر إلى (-Δ)، يكون له الأثر التالى على القيم المثلى للمتغيرات الأساسية:

$$س_{١} = ٣\٥ + ٦\٥ \Delta$$

$$س_{٢} = ٣\٢٠ - ٣\٢ \Delta$$

[لاحظ أن الحدود الأولى فى الجانب الأيسر، تمثل قيم المتغيرات فى عمود الحل، بينما الحدود الثانية تمثل معاملات عمود س٢ مضروبة فى Δ].

ولكى يبقى الحل فى نطاق الإمكان، يلزم أن تظل قيم المتغيرات الأساسية غير سالبة، وخلاف ذلك فإن الحل لن يكون ممكناً، وليس فقط أمثلاً. وعلى ذلك فمدى الأمثلية سيكون صحيحاً، طالما تحقق الآتى :

القيمة المعدلة لـ $س_{١} = ٣\٥ + ٦\٥ \Delta \geq$.

القيمة المعدلة لـ $س_{٢} = ٣\٢٠ - ٣\٢ \Delta \geq$.

ومن العلاقة الأولى، سنجد أن : $٦\٥ \Delta \geq - ٣\٥$

$\therefore \Delta \geq - ٢$

وهذا يمثل أقصى تخفيض فى طاقة المورد الأول.

فمن العلاقة الثانية، نجد أن : $- ٣\٢ \Delta \geq - ٣\٢٠$

$\therefore \Delta \leq ١٠$

وهذا يمثل أقصى زيادة فى طاقة المورد الأول.

وعلى ذلك، فتحليل الحساسية يظل صحيحاً طالما كان التغير فى إطار المدى التالى :

$$(١٠ - ٢) \leq (ط_{١} = ١٠) \leq (١٠ + ١٠)$$

$$[\ ٨ \leq (ط_{١} = ١٠) \leq ٢٠\ ]$$

∴ طاقة المورد الأول، يمكن أن ترتفع من ١٠ إلى ٢٠، أو تنخفض من ١٠ إلى ٨، ويظل مع ذلك الحل ممكناً.

ومرة أخرى، وكما ذكرنا فى تحليل حساسية معاملات دالة الهدف، أنه إذا تعددت الحدود القصوى، فعلينا اختيار أقلها إيجابية، وإذا تعددت الحدود الدنيا، فعلينا اختيار أقلها سلبية.

كما تجدر الإشارة، إلى أنه إذا كان البرنامج به قيود من نمط ≤ أو =، فإن المتغير الذى سيعبر عن القيد هو المتغير الوهمى، ومن ثم سيلعب نفس الدور الذى لعبه المتغير الراكد فى تحليلنا السابق، وخاصة فى تعيين سعر الظل، ومعدلات التزايد فى القيم المثلى للمتغيرات مع كل وحدة إضافية من Δ، حيث ننظر إلى عمود المتغير الوهمى الممثل للقيد، للتوصل إلى النتائج المطلوبة. وعلى سبيل التوضيح، إذا عدنا المثال التصويرى رقم (٢)، سنجد أن القيد الثانى (وكذلك الثالث)، يمثله المتغير الوهمى (هـ١، هـ٢) على التوالى، وإذا قمنا بتحليل حساسية الجانب الأيسر للقيد الثانى (ط٢)، فإننا سنقف على التأثيرات التالية :

١- قيمة الهدف المثلى بدلالة التغير = ٣٦ + ١٠ Δ (لاحظ تجاهل م)

٢- بالنسبة لقيم المتغيرات المثلى بدلالة التغير فهى :

بالنسبة لـ ك١ = ٤ + ١ Δ

بالنسبة لـ س٢ = ٦ + ٣ Δ

بالنسبة لـ س١ = ٠ + -٢ Δ

∴ ٤ + Δ ≤ ٠ ∴ Δ ≤ -٤ (أقصى تخفيض)

& ٦ + Δ٣ ≤ ٠ Δ ٣ ≤ -٦

∴ Δ ≤ -٢ (أقصى تخفيض)

& ٠ - Δ٢ ≤ ٠ ∴ -٢ Δ ≤ ٠

∴ Δ ≥ ٠ (أقصى زيادة)

وبالتالى فإن أقصى زيادة هى الصفر.

كما أقصى خفض هو (-٢).

∴ صحة مدى التحليل تتمثل فى

$$(٦-٢) \geq (ط_{٢} = ٦) \geq (٦+٠)$$

$$[\ ٦ \geq (٦ = ٢ط) \geq ٤\ ]$$

ولا يخفى أنه فى ضوء البيانات التى يوفرها تحليل الحساسية. فيمكننا على الفور تحديث الحل طالما أن التغير فى إطار مدى الصحة. فعلى سبيل المثال، افترض أن بالمثال التصويرى رقم(١) قد زادت من ١٠ إلى ١٦، وبما أن هذه الزيادة فى إطار مدى الصحة حيث $\Delta = ١٦-١٠=٦$

∴ القيمة المثلى للهدف = ٣\١٨٥ +(٦\١٧ ×٦)= ٣\٢٣٦

& القيمة المثلى ل س$_{١}$= ٣\٥+ (٦\٥×٦) = ٣\٢٠

& القيمة المثلى لـ س$_{٢}$= ٣\٢٠- (٣\٢×٦)=٣\٨

وإذا انتقلنا إلى المثال التصويرى رقم (٢)، ورغبنا فى التعرف على تأثيرات تخفيض ط$_{٢}$ من ٦ إلى ٤,٥، أى أن $\Delta = -١,٥$، فيمكننا تحديد القيم المقلى التالية :

قيمة الهدف = ٣٦ + ١٠ (-١,٥) = ٢١

قيمة ك$_{١}$ = ٤ + ١ (-١,٥) = ٢,٥

قيمة س$_{٢}$ = ٦ + ٣ (-١,٥) = ١,٥

قيمة س$_{١}$ = ٠ + (-٢) (-١,٥) = ٣

وفى كل من المثالين تظل القيم المثلى كـ.، ومن ثم تتوافق مع شرط الإمكان.

هذا، ويجب أن نلتفت إلى أنه إذا كان القيد يمثل متغير وهمى، فإن قيمة التحسين فى دالة الهدف، لكل وحدة إضافية من طاقة القيد، هى بالدقة، قيمة المتغير المطلقة فى الصف (أح –دح)، فمثلاً، إذا كنا نتناول تحليل حساسية طـ٢ فى المثال التصويرى رقم (٢)، فإن سعر الظل هو ٢، والذى يمثل القيمة المطلقة للعمود هـ٢ فى الصف (أح – دح).

وحتى الآن، فإننا افترضنا أن التغير فى الجانب الأيسر للمعادلة، فى حدود المدى المسموح به، ليظل الحل فى نطاق الإمكان، ولكن ماذا لو أن التغير فى طاقة المورد أكبر من الحد الأقصى لمدى التغير، أو أقل من الحد الأدنى لهذا المدى ؟، هذا ما نعرج عليه الآن.

ومرة أخرى إذا اعتمدنا على **بيانات المثال التصويرى رقم (١)**، وحيث كان مدى صحة تحليل الحساسية لطاقة المورد الأول (طـ١) هو من [٨ : ٢٠]، وإذا استكملنا تحليل حساسية المورد الثانى (طـ٢)، فإن (طـ٢ + Δ)، ستنتج الآثار التالية :

قيمة الهدف المثلى بدلالة $\Delta = ٣\backslash١٨٥ + ٦\backslash٥\ \Delta$

قيمة س١ بدلالة $\Delta = ٣\backslash٥ - ٦\backslash١\ \Delta$

قيمة س٢ بدلالة $\Delta = ٣\backslash٢٠ + ٣\backslash١\ \Delta$

ولكى يظل تحليل الحساسية صحيحاً، يلزم أن يكون :

$$٣\backslash٥ - ٦\backslash١\ \Delta \leq ٠ \quad \& \quad ٧\backslash٢٠ + ٣\backslash١\ \Delta \geq ٠$$

ومن العلاقة الأولى نجد أن $-٦\backslash١\ \Delta \leq -٣\backslash٥$ $\quad \therefore \Delta \geq ١٠$

وهذا يمثل الحد الأقصى للتغير الموجب فى طـ٢.

ومن العلاقة الثانية نجد أن : $٣\backslash١\ \Delta \leq -٣\backslash٢٠$

$$\therefore \Delta \leq -٢٠$$

وهذا يمثل الحد الأقصى للتغير السالب فى ط٢.

وفى ضوء هاتين العلاقتين، فإن مدى التغير المسموح به، بحيث نضمن أن قيم الحل لا يكون بينها قيم سالبة (أى التوافق مع شرط الإمكان)، هو :

$$(٤٠ - ٢٠) \geq (ط_٢ = ٤٠) \geq (٤٠ + ١٠)$$

$$٢٠ \geq (ط_٢ = ٤٠) \geq ٥٠$$

خلاصة تحليل الحساسية السابق فى المثال التصويرى رقم (٢) هو أن صحة مدى التغير لـ ط١ هو [٨: ٢٠] وصحة مدى التغير لـ ط٢ هو[٢٠: ٥٠].

والآن سنفترض أن ط١، قد زادت عن الحد الأقصى المسموح به، لتصبح ٢٤، أى Δ ط١ = +١٤ وسنفترض كذلك أن ط٢، قد هبطت عن الحد الأدنى المسموح به لتصبح ١٨، أى Δ ط٢ = -٢٢. فما أثر ذلك على الحل الأمثل ؟.

بالطبع، فإن التوقع المنطقى هو، أن الجوانب اليسرى للمعادلات (قيم الحل) ستصبح سالبة، مما يفيد أن الحل الأمثل لم يعد ممكناً. ومن أجل إعادة الأمثلية علينا القيام بالخطوتين التاليتين :

(١) إيجاد القيم الجديدة للحل، باستخدام مفهوم مصفوفة المقلوب.

(٢) التوصل إلى الحل الأمثل الجديد ، من خلال تطبيق أسلوب مقابل السمبلكس (لاحظ أننا بصدد حل أمثل غير ممكن).[٥٨]

وفيما يلى التطبيق:

$$(١)\begin{bmatrix} س_١ \\ س_٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦\backslash٥ & -٦\backslash١ \\ -٣\backslash٢ & ٣\backslash١ \end{bmatrix} \begin{matrix} س_٣ \\ س_٤ \end{matrix} \begin{bmatrix} ٢٤ \\ ١٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٧ \\ -١٠ \end{bmatrix} = \text{الجانب الأيسر الجديد للجدول}$$

(٢) تطبيق مقابل السمبلكس توصلاً إلى الحل الممكن الأمثل [لاحظ تغيير طاقات الجوانب اليسرى خارج المدى المسموح به، قد جعل ط٢، ذات قيمة سالبة (-١٠)].

وفقاً للخطوة (١) فإن جدول الحل الأمثل، سيصبح كما يلى (وهو نفس الجدول الأمثل، مع تعديل عمود الحل وفقاً للنتائج الجديدة) :

الأساس	دح	٩	٧	٠	٠	الحل
		س١	س٢	س٣	س٤	
س١	٩	١	٠	٦\٥	-٦\١١	١٧
س٢	٧	٠	١	(-٣\٢)	٣\١	١٠- ←
أح		٩	٧	٦\١٧	٦\٥	٨٣
أح - دح		٠	٠	٦\١٧	٦\٥	

وطالما أن الحل يتوافق مع شرط الأمثلية (حيث قيم أح -دح ≥.)، ولكنه غير ممكن (لوجود قيم سالبة فى عمود الحل)، إذن نطبق أسلوب مقابل السمبلكس للتخلص من عدم الإمكان. حيث نختار أولاً المتغير الأساسى الخارج، صاحب القيمة الأكثر سالبية فى عمود حل، وهو الصف س٢ فى المثال، ثم نوجد خارج قسمة معاملات الصف (أح-دح) على معاملات الصف (س٢). وذلك بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية. واختيار القيمة المطلقة الأدنى لتعبر عن المتغير غير الأساسى الداخل، ونتابع خطوات السمبلكس بالطريقة العادية.

∴ لإيجاد المتغير غير الأساسى المرشح للخروج، نحسب النسب التالية :

س٣	س٤
٦\١٧ ÷ (-٣\٢)= - ٨,٥	٦\٥ ÷ ٣\١ = ٦\١٥ = ٢,٥

ولما كانت المشكلة تعظيم، علينا اختيار المتغير ذو القيمة المطلقة الأدنى، وهو عندئذ س٣، ليكون المتغير غير الأساسى الدخل، وبذلك يصبح الجدول كما يلى:

الأساس	دح	٩	٧	٠	٠	الحل
		س١	س٢	س٣	س٤	
س١	٩	١	١,٢٥	٠	٠,٢٥	٤,٥
س٣	٠	٠	١,٥-	١	٠,٥-	١٥
أح		٩	١١,٢٥	٠	٢,٢٥	٤٠,٥
أح - دح		٠	٤,٢٥	٠	٢,٢٥	

∴ قيم (أح - دح) ≤ ٠، إذن نحن بصدد حل أمثل، ∴ قيم عمود الحل ≤ ٠، إذن نحن بصدد حل ممكن. ∴ هذا هو الحل الأمثل الممكن المطلوب.

وعلى القارىء أن يلاحظ، أنه كنتيجة، للخروج عن صحة مدى تحليل الحساسية، فقد لحق بالحل الأمثل تغيراً جذرياً ،أدى إلى تغير مكونات المزيج الأمثل، فبعد أن كانت عناصر المزيج الأمثل هى (س١، س٢) أصبحت فى الحل الأمثل الجديد (س١، س٣)، هذا فضلاً عن تغير دالة الهدف من ٣\١٨٥ إلى ٤٠,٥ فيما بين الحلين الأمثلين قبل وبعد التغير. ولعل هذا يوضح أن التغيرات التى تصيب نطاق الإمكان، ولكن فى الحدود المسموح بها وفقاً لمدى الأمثلية، ستؤدى إلى تغيير قيمة المتغيرات الأساسية (دون تغيير لطبيعة هذه المتغيرات) فضلاً عن تغيير قيمة الهدف. أما التغيرات التى تصيب أمثلية الحل، وتكون فى الحدود المسموح بها وفقاً لمدى الأمثلية، فإنها ستؤدى إلى تغيير قيمة الهدف، دون المساس بالمتغيرات الأساسية سواء فى قيمها أو فى طبيعتها.

وختاماً لهذه الجزئية، يلزم التعرف على كيفية **تحليل حساسية الجانب الأيسر لقيد غير حاكم**، ولقد سبق أن أوضحنا أنه إذا ظهر فى الحل الأمثل، أن أحد المتغيرات الأساسية، هو متغير راكد أو متغير فائض، فإن القيد الذى يمثله هذا المتغير، يكون قيداً غير حاكم. ونتساءل الآن عن أثر تغير طاقة هذا القيد، على الحل الأمثل، وبافتراض ثبات البيانات الأخرى للبرنامج الخطى ؟.

وإذا عدنا إلى **المثال التصويرى رقم (٢)**، سنجد أن من بين المتغيرات الأساسية فى الحل الأمثل، المتغير ك١، وهو متغير راكد يمثل القيد الأول، وقيمة هذا المتغير =٤، إذن نحن بصدد قيد غير حاكم، ومتباينته هى :

[٢س١ + س٢ ≥ ١٠]، فما أثر تغير ط١ من (١٠) إلى (١٠ + Δ) ؟

وبالرغم من الأسس العلمية الدقيقة لمثل هذا النوع من التحليل، تخرج عن نطاق هذا الكتاب، ألا أنه يمكن الوقوف على الملاحظات المنطقية التالية :(٥٩)

١ ـ إذا كان القيد غير الحاكم من النمط ≤، فإن النقص فى الجانب الأيسر – أياً كان مستواه –، لن يكون له تأثير على القيم المثلى للمتغيرات، اللهم ألاّ باستثناء زيادة قيمة المتغير الفائض لتعويض هذا النقص. (بمعنى إذا انخفض الجانب الأيسر للقيد بـ ٦، فإن المتغير الفائض للقيد سيزداد بـ٦، مع بقاء المتغيرات الأخرى جميعها دون تعديل). هذا، كما أن زيادة الجانب الأيسر، سيصاحبها فقط نقص معادل فى المتغير الفائض.

٢ ـ إذا كان القيد غير حاكم من النمط ≥، فإن الزيادة فى الجانب الأيسر، أياً كان مستواها –، لن يكون لها تأثير على القيم المثلى للمتغيرات، الفهم ألاّ باستثناء، تزايد القيمة المثلى للمتغير العاطل بنفس القدر. كما أن نقص الجانب الأيسر، سيصاحبه نقص مماثل فى المتغير الراكد.

٣ ـ لتعيين مدى الأمثلية، فإذا كان القيد من النمط ≥، فإن أقصى زيادة مسموح به لطاقته هى دائماً α، كما أن الحد الأقصى لانخفاض طاقة هذا القيد، يعادل القيمة المثلى للمتغير الراكد لهذا القيد. أما إذا كان القيد من النمط ≤، فإن أقصى زيادة مسموح بها لطاقته، تعادل دائماً، القيمة المثلى للمتغير الفائض لهذا القيد، كما أن أقصى نقص مسموح به لطاقته هو دائماً α.

[لاحظ أننا لم نشر إلى القيود من النمط =، لأنها بالطبيعة قيود حاكمة].

٤ ـ إن سعر الظل للقيد غير الحاكم هو دائماً صفر.

٥ ـ فى ضوء هذه الملاحظات، فإن القيد محل التحليل (وهو من نمط ≥)، سيسمح لطاقته أن تزداد دونما حد، أما الحد الأدنى لنقص طاقته فيساوى (٤) – وهى القيمة المثلى لـ ك، فى عمود الحل.

وعلى ذلك ، فإن مدى صحة تحليل الحساسية لـ ط، هو

$$(١٠-٤) \geq (ط، = ١٠) \geq \alpha$$

$$[\ \alpha \geq (ط، = ١٠) \geq ٦\ ]$$

وفى ظل هذا المدى، فإن سعر الظل لـ ط، = ٠، ومن ثم فليس هناك تأثير على قيمة الهدف. كما أن القيم المثلى للمتغيرات ستظل دونما تغير، مع التغير الموجب أو السالب فى ط، باستثناء أن ك، سيلحق بها نفس التغير وفى نفس الاتجاه.

[٧-٣-٢-٢] تحليل أثر إضافة قيد جديد :

إن إضافة قيد جديد، بعد التوصل إلى الحل الأمثل للبرنامج الخطى، أمر قيد يحدث لأسباب متنوعة. فعلى سبيل المثال، قد يكون السبب هو ارتكاب خطأ، من خلال تجاهل بعض البيانات الهامة عند تكوين البرنامج الخطى للمشكلة. وقد يكون السبب، ظهور مستجدات تستدعى ضرورة إضافة قيد

جديد. وعلى أى حال، وبصرف النظر عن الأسباب، فإنه عند إضافة قيد جديد، علينا القيام بالآتى: (٦٠)

اختبار، إذا ما كان هذا القيد المضاف يجعل الحل الأمثل غير ممكن أم لا، ويتم ذلك الاختبار من خلال معرفة إذا كان هذا القيد المضاف يجعل الحل الأمثل غير ممكن أم لا، ويتم ذلك الاختبار من خلال معرفة إذا ما كان هذا القيد الجديد، يتوافق مع الحل الأمثل الراهن أم لا ؟. فإذا كان متوافقاً مع الحل فإن ذلك يفيد أن هذا القيد الجديد إما زائداً أو سطحياً، وفى كلتا الحالتين، فإن إضافته لن تغير الحل الأمثل. أما إذا كان هذا القيد المضاف غير متوافق مع الحل الراهن، فإن ذلك يفيد أننا بصدد قيد حاكم، ومن ثم فإن الحل الأمثل الراهن سيصبح غير ممكن من جراء إضافة هذا القيد. ولذلك فى هذا الحالة نتابع الخطوات التالية:

١. تحويل القيد المضاف إلى معادلة، مع إضافته إلى مجموعة المعادلات الحالية (بالحل الأمثل).
٢. تطبيق قواعد الحذف الجاوسيانى، أو طريقة التعويض، بهدف الحفاظ على المتغيرات الأساسية الراهنة، وجعل المتغير التكميلى للقيد المضاف هو المتغير الأساسى فى معادلته.
٣. طالما أننا بصدد حل أمثل وغير ممكن، فعلينا استخدام أسلوب مقابل السمبلكس توصلاً إلى الحل الأمثل الممكن.

فإذا افترضنا فى **المثال التصويرى رقم (١)**، أن هناك قيد جديد، يجب إضافته للبرنامج الخطى الراهن بعد توصلنا إلى الحل الأمثل، وكان القيد :

$$س_١ \geq ٢$$

وطالما أن الحل الأمثل الراهن يخبرنا بأن س١ = ٣/٥، فإن اختبار التوافق يفيد بأن القيد الجديد متسق مع الحل الراهن، ومن ثم لن يطرأ عليه أى تغير. (هذا يفيد أن القيد المضاف غير حاكم).

أما إذا افترضنا أن القيد الجديد هو:

$$س_1 \geq 1$$

فإن ذلك، سيجعل الحل الراهن الأمثل غير ممكن (حيث س١ = ٣\٥)، وعلينا عندئذ متابعة ما يلى :

(١) تحويل القيد المضاف إلى معادلة ليصبح :

$$س_1 + س_5 = 1$$

(٢) إضافة هذه المعادلة لنظام المعادلات بالحل الأمثل الراهن كما يلى :

$$س_1 \quad + ٦\٥ س_3 - ٦\١١ س_4 = ٣\٥$$

$$س_2 - ٣\١٢ س_3 + ٣\١١ س_4 = ٣\٢٠$$

$$س_1 \quad + س_5 = 1$$

وحتى يظل س١ هو المتغير الأساسى فى المعادلة الأولى، وجعل س٥ هو المتغير الأساسى فى المعادلة الثالثة، إذن علينا، التعويض عن قيمة س١ بالمعادلة الأولى، فى المعادلة الثالثة كما يلى:

∴ س١ = ٣\٥ - ٦\٥ س٣ + ٦\١١ س٤ ..... من المعادلة الأولى

∴ وبالتعويض عن قيمة س١ فى المعادلة الثالثة، تصبح معادلة القيد الجديد المضاف كما يلى :

$$(٣\٥ - ٦\٥ س_3 + ٦\١١ س_4) + س_5 = 1$$

$$∴ \quad - ٦\٥ س_3 + ٦\١١ س_4 + س_5 = - ٣/٢$$

(٣) تكوين الجدول المعدل بنفس قيم الحل الأمثل السابق ومتغيراته، مع إضافة هذا القيد الجديد فى صورته المتوافقة مع مفهوم مجموعة المتغيرات المنعزلة، لنحصل على الجدول التالى والذى نلاحظ فيه أن قيمة س٥ = -٣\٢، مما يفيد عدم الإمكان، وعليه نطبق أسلوب مقابل السمبلكس.

الأساس	د ح	٩	٧	٠	٠	٠	الحل
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	
س١	٩	١	٠	٦\٥	-٦\١	٠	٣\٥
س٢	٧	٠	١	-٣\٢	٣\١	٠	٣\٢٠
س٥	٠	٠	٠	-٦\٥	٦\١	١	-٣\٢
أ ح		٩	٧	٦\١٧	٦\٥	٠	٣\١٨٥
أ ح - د ح		٠	٠	٦\١٧	٦\٥	٠	

∴ المتغير الأساسى الخارج هو س٥ (صاحب القيمة الأكثر سالبية)، ولتحديد المتغير غير الأساسى الخارج، نوجد النسب التالية :

س٣ ← (٦\١٧) ÷ (-٦\٥) = - ٥\١٧

س٤ ← (٦\٥) ÷ (٦\١) = ٥

∴ أدنى قيمة مطلقة هى (-٥\١٧) ∴ س٣ هو المتغير غير الأساسى الداخل، وعليه يصبح الجدول الجديد كما يلى :

الأساس	د ح	٩	٧	٠	٠	٠	الحل
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	
س١	٩	١	٠	٠	٠	١	١
س٢	٧	٠	١	٠	٠,٢	٠,٨-	٧,٢
س٣	٠	٠	٠	١	٠,٢-	١,٢-	٠,٨
أ ح		٩	٧	٠	١,٤	٣,٤	٥٩,٤
أح - دح		٠	٠	٠	١,٤	٣,٤	

وهذا هو الحل الأمثل الممكن.

[٧-٣-٣] إيجاز :

يمكن إيجاز الإطار العام لتحليل الحساسية فيما يلى :[٦٢]

١. ضرورة تعديل النموذج، وفقاً للتغير الجديد المطلوب، حتى يتسنى فحصه من جديد.

٢. التعرف على تأثيرات هذا التغير على الحل الأمثل الراهن.

٣. التأكد من أن الحل الأمثل مازال خاضعاً لمفهوم مجموعة المتغيرات الأساسية المنعزلة ، وإن لم يكن كذلك، فيلزم استخدام قواعد الحذف الجاوسيانى لتحقيق هذا الهدف.

٤. إجراء اختبار الإمكان، من خلال معرفة ما إذا كانت قيم المتغيرات الأساسية فى عمود الحل، مازالت غير سالبة.

٥. إجراء اختبار الأمثلية - إن كان الحل ممكناً - من خلال معرفة ما إذا كانت المعاملات الخاصة بالمتغيرات غير الأساسية فى الصف ح (أو أح - دح)، ما زالت غير سالبة.

٦. إعادة الأمثلية، عندما يفشل الاختبار سواء فى الإمكان أو فى الأمثلية، وذلك باستخدام الجدول الأمثل الراهن، كجدول مبدئى، ثم استخدام طريقة السمبلكس أو مقابل السمبلكس حسب الأحوال، توصلاً إلى الحل الأمثل الممكن الجديد.

[٨] تكوين البرامج الخطية للمشكلات العملية:

يمكن النظر إلى المشاكل الخطية ، على أنها تنطوى على ثلاثة مراحل ، المرحلة الأولى هى التحضير الرياضى للمشكلة ، والثانية هى حل البرنامج توصلا إلى الأمثل ، والثالثة القيام بتحليلات ما بعد الأمثلية. ولقد سبق عرض المرحلتين الثانية والثالثة. ويمكن القول أن المرحلة الثانية ، يمكن إنجازها كليا من خلال برامج الحاسبات الآلية توفيرا للوقت والجهد ، وهذا القول لا يعنى بأى حال الانتقاص من ضرورة تفهم كيفية الحل بشكل تام ودقيق ، والآن يتسنى القيام بالمرحلة الثالثة ، والتى كما سبق البيان تعتمد على الإدراك الكامل لطبيعة الحسابات وأبعادها. أما المرحلة الأولى ، فينظر إليها ، على أنها الأكثر صعوبة فى الممارسة العملية ، حيث أن تحويل المشاكل الوصفية فى العالم الواقعى إلى نماذج رياضية ، يعد نوعا من ضروب الفن ، ويتطلب قدرا عاليا من الفهم لأبعاد المشكلة ، والصبر من أجل الوصول إلى النموذج الصحيح لها. ولعل من مصادر الصعوبة هنا ، أن لكل مشكلة واقعية ، معطياتها الخاصة بها ، والتى يتوجب إدراكها بعمق ، حتى يكون البرنامج الخطى معبرا عنها بصورة دقيقة. إن تكوين البرامج فى حقيقته هو فن صياغة كم غير مرتب من الحقائق والمعلومات فى صورة برنامج خطى جيد التنظيم. ونقدم هنا عددا من المشكلات الواقعية التى تسود فى عالمنا المعاصر ، مستهدفين تحقيق الآتى:

(١) تفهم كيفية تكوين البرامج الخطية ، من خلال الوصف اللغوى للمشكلات.