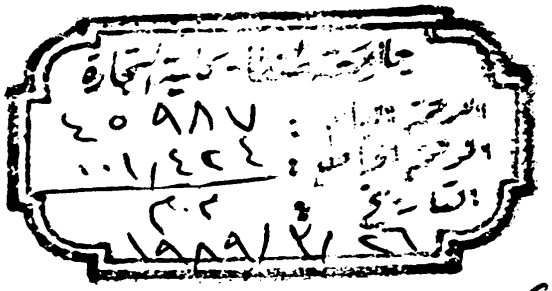
٤٥٩٨٧

البرمجة الخطية

(التوزيع الأمثل للموارد المحدودة)



دكتور محمد توفيق ماضى
كلية التجارة - جامعة الإسكندرية
دكتوراة فى إدارة الإنتاج من جامعة ولاية لويزيانا
ماجستير فى علم الإدارة من جامعة كارولينا الشمالية
ماجستير فى إدارة الأعمال من جامعة القاهرة
أستاذ مساعد إدارة الإنتاج بجامعة ويسترن كنتاكى (سابقاً)



مكتبة كلية التجارة جامعة طنطا - ١٩٨٩

تحليـــل الحســـاسية
Sensitivity Analysis

بعد أن نصل إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية ، يكون فى الغالب هناك تساؤل عما سوف يحدث لهذا الحل إذا تغير أحد أجزاء المشكلة التى تم حلها . ومثال ذلك ، قد نكون مهتمين بأسئلة مثل :

١ – ماذا يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت القيمة الموجودة فى الطرف الأيسر لأحد القيود . ماذا فى مثالنا السابق إذا تغيرت حصة الخشب المتاحة أسبوعياً ؟

٢ – ماذا سوف يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت أحد القيم الموجودة فى دالة الهدف . ماذا فى مثالنا لو زاد الربح المحقق من إنتاج وبيع المكتب بمبلغ معين ؟

٣ – ماذا سوف يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت المعاملات الموجودة فى الطرف الأيمن من متباينات القيود . ما هو أثر أن تزيد عدد ساعات العمل اللازمة لانتاج المقعد برقم معين ؟ .

فى مثل هذه الحالات يثار التساؤل حول ما إذا كان الحل الأمثل سوف يتغير أو سوف يبقى كما هو ؟ وإذا كان سوف يتغير هل لابد من حل كل المشكلة مرة أخرى بالقيم الجديدة للوصول إلى الحل الأمثل الجديد ؟ هل من طريقة لمعرفة الحل الأمثل الجديد دون حل المشكلة مرة أخرى ؟ الإجابة على ذلك تكمن فيما يسمى بتحليل الحساسية Sensitivity analysis والذى – كما هو واضح من التسمية – يقيس درجة حساسية الحل الأمثل الحالى للتغير فى القيم الواردة parameters فى المشكلة الأصلية . ويمتاز هذا المدخل بأنه يوفر تكلفة وجهد إعادة حل المشكلة مرة أخرى حتى فى حالة استخدام الكومبيوتر . وسوف نتناول هنا عرض هذا النوع من التحليل فى الحالات الثلاث التى ذكرنا سابقاً (١) حالة تغير قيم الطرف الأيسر ، (٢) حالة تغير أحد القيم

الموجودة فى دالة الهدف ، و (٣) حالة تغير المعاملات فى الطرف الأيمن فى متباينات القيود .

أولاً : تغير قيم الطرف الأيسر فى القيود :

يعبر الجانب الأيسر من القيود فى غالب الأحيان عن قيمة الموارد المتاحة . وطالما أن هذه الموارد تعتمد على توافر الأموال لدى المنشأة وظروف السوق ، وظروف التشغيل الفعلية ، وعلى العاملين أنفسهم . فإنه من المتوقع دائماً أن تتغير قيمة تلك الموارد . ولتتبع معنى هذا التغيير . فى القيد الأصلى الخاص بالمادة الخام (الأخشاب) فى المثال السابق

$$٥ س_١ + ٤ س_٢ \leq ١٢٠$$

إذا افترضنا أن قيمة الموارد المتاحة من هذا النوع قد ارتفعت إلى ١٢١ وحدة فإن القيد يصبح :

$$٥ س_١ + ٤ س_٢ \leq ١٢١$$

وحسب أسلوب الرسم البيانى فإنه من الواضح أن ميل الخط لم يتغير وإنما الذى تغير هو تقاطع هذا القيد مع كل من محور $س_١$ ، محور $س_٢$ (يمكن للطالب إثبات ذلك بنفسه باستخدام ورقة بيانية ورسم الخطين) . ويعنى ذلك أن القيد الجديد سوف يوازى القيد القديم وسوف يقع أعلى منه (لأن ١٢١ > ١٢٠) . وبالطبع يمكن تتبع أثر ذلك بيانياً على الحل الأمثل ، إلا أن ذلك لا يصلح فى حالة وجود أكثر من متغيرين . ولذلك سوف نناقش ذلك بناءاً على جدول السمبلكس النهائى الذى توصلنا إليه والذى نورده هنا مرة أخرى كما يلى :

جدول الحل الأمثل (الأخشاب = ١٦٠)

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$
١٠	$س_1$	٢٠	١	صفر	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
٩	$س_2$	٥	صفر	١	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$
	ل	٢٤٥	١٠	٩	$\frac{11}{6}$	$\frac{5}{12}$
ح - ل			صفر	صفر	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{5}{12}$

ولنفرض الآن كما ذكرنا أن الأخشاب المتاحة زادت إلى ١٢١ والمراد تحديد أثر ذلك على الحل الأمثل الحالى وهو :

$س_1 = ٢٠$ ، $س_2 = ٥$ ، $ع_1 = ع_2 =$ صفر ؟

نظراً لأن $ع_1$ = صفر فى الحل الأمثل فإن ذلك يعنى أن كمية الأخشاب الغير مستخدمة تعادل صفر ، وهذا معناه أن جميع الأخشاب مستخدمة بالكامل . ومن ثم فإن زيادة الأخشاب سوف يترتب عليها بالضرورة تغير فى إنتاج كل من السلعتين أو فى واحدة منهم فقط . ولتحديد ذلك نرجع إلى العمود $ع_1$ والذى يحوى قيم تعبر كما أوضحنا من قبل عن معاملات إحلال $ع_1$ مع كل من $س_1$ ، $س_2$. فالقيمة $\frac{1}{3}$ تعنى أن تخفيض $ع_1$ (زيادة الأخشاب المستخدمة) بوحدة واحدة سوف يترتب عليه زيادة $س_1$ بما يعادل $\frac{1}{3}$ وحدة . كما أن زيادة $ع_1$ (تخفيض الأخشاب المستخدمة) بوحدة سوف يترتب عليه تخفيض $س_1$ بما يعادل $\frac{1}{3}$ وحدة . وبنفس المنطق فإن ($-\frac{1}{6}$) تحكم العلاقة بين $ع_1$ ، $س_2$.

والآن إذا زادت قيمة الأخشاب المتاحة إلى ١٢١ وحدة ، فإن تأثير الوحدة الجديدة الزائدة من الأخشاب سوف يكون له نفس تأثير تخفيض $ع_1$ بوحدة

واحدة . وبالنظر إلى العمود ع$_{١}$ نجد أن تخفيض ع$_{١}$ بمقدار الوحدة سوف يترتب عليه : (أ) زيادة س$_{١}$ بمقدار $\frac{١}{٣}$ وحدة و (ب) تخفيض س$_{٢}$ بمقدار $\frac{١}{٦}$ وحدة . بتأمل أثر ذلك على كمية الخشب نجد أن :

الخشب الإضافى المستخدم فى س$_{١}$ = $\frac{١}{٣}$ × ٥ (للوحدة) = $\frac{٥}{٣}$

الخشب الذى يتم توفيره من س$_{٢}$ = $\frac{١}{٦}$ × ٤ (للوحدة) = $\frac{٤}{٦}$

وبالتالى فإن صافى الخشب الإضافى المستخدم

= $\frac{٥}{٣} - \frac{٤}{٦} = \frac{٦}{٦}$ = ١ وحدة

وهذه الوحدة هى الوحدة الإضافية فى الخشب (١٢١ - ١٢٠)

والآن ، إذا كان هذا هو التغيير الوحيد فإننا يمكننا عمل جدول السمبلكس الذى يعبر عن الحل الأمثل عندما يزيد الطرف الأيسر إلى ١٢١ كما يلى (يمكن للقارىء أن يتأكد من خلال خطوات تفصيلية أن ذلك هو جدول الحل الأمثل النهائى الجديد) :

جدول الحل الأمثل (الأخشاب = ١٢١)

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س$_{١}$	س$_{٢}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$
١٠	س$_{١}$	٢٠$\frac{١}{٣}$	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	س$_{٢}$	٤$\frac{٥}{٦}$	صفر	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٦$\frac{٥}{٦}$	- ١	٩	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح - ل			صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

وقد تم التوصل إلى القيم الجديدة للمتغيرات الأساسية عن طريق جمع معاملات العمود ع$_1$ وقيم المتغيرات الأساسية فى جدول الحل الأمثل قبل تغيير كمية الأخشاب . ويوضح الجدول أن ربح الحل قد ارتفع إلى $٢٤٦\frac{٥}{٦}$ ويعبر ذلك عن زيادة بمقدار سعر الظل الخاص بالمتغير ع$_1$ فى الجدول . فالربح الجديد $= ٢٤٥ + \frac{١١}{٦} = ٢٤٦\frac{٥}{٦}$ لاحظ أن المتغيرات الأساسية فى الحل لم تتغير وإنما الذى تغير هى قيم تلك المتغيرات .

ويجب هنا أن نوضح أن هذا التحليل لا يعنى أنه من الممكن وإلى مالا نهاية زيادة الربح عن طريق زيادة وحدات من الأخشاب ، فقد لا يكون ممكناً infeasible بعد كمية معينة من التغيير استغلال الموارد الزائدة . ويعبر عن ذلك بالقول بأن ذلك يعد صحيحاً بشرط ألا يكون التغيير كبيراً إلى الحد الذى يجعل الحل حلاً غير ممكناً . ولهذا نكون مهتمين دائماً بتقرير ما هو الحد الذى يمكن أن تتغير القيمة فى الطرف الأيسر من القيد دون أن تتغير ماهية (وليست قيمة) المتغيرات الأساسية فى الحل الحالى الأمثل ؟ أى أننا نريد إلى أى حد يمكن أن يتغير الطرف الأيسر لأحد القيود وتظل المتغيرات الأساسية (وليست قيمها) كما هى ؟

لإيضاح ذلك دعنا نفترض أن الطرف الأيسر من القيد الأول قد تغير بقيمة هى Δ فإذا استبدلنا القيمة ١٢٠ بالقيمة $١٢٠ + \Delta$ فى جدول السمبلكس المبدئى وقمنا بعمل نفس خطوات الحل نجد أن الجدول النهائى الذى به الحل الأمثل هو كما يلى :

ح			١٠		صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س١	س٢	ع١	ع٢
١٠	س١	٢٠ + $\frac{١}{٣}$ Δ	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	س٢	٥ − $\frac{١}{٦}$ Δ	صفر	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٥ + $-\frac{١١}{٦}$ Δ	١٠	٩	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح − ل			صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

ويلاحظ على هذا الجدول أن التغير الوحيد كان فى عمود قيم المتغيرات الأساسية . فلم تتغير تلك المتغيرات ولكن تغيرت قيمتها . كذلك فإن مصفوفة المعاملات كما هى ، كما أن الصفوف ل ، (ح − ل) لم يتغيرا . وأكثر من ذلك فإن القيم الجديدة فى العمود الخاص بقيم المتغيرات لها علاقة بالمعاملات الموجودة فى العمود ع١ . فمثلاً (٢٠ + $\frac{١}{٣}$ Δ) ما هى إلا القيمة الأصلية ٢٠ + القيمة الموجودة فى العمود ع١ فى الصف س١ مضروبة فى مقدار التغير Δ . كذلك فإن (٥ − $\frac{١}{٦}$ Δ) ما هى إلا القيمة الأصلية ٥٠ + القيمة الموجودة فى العمود ع١ فى الصف س٢ مضروبة فى مقدار التغير Δ . أى أنها مرتبطة تماماً بالعمود ع١ الذى هو الطاقة العاطلة المناظرة للقيد الأول . ويمكن تلخيص الفارق بين الجدول الأصلى والجدول الذى به تغير قيمته Δ فى القيد الأول كما يلى :

قيم المتغيرات الجديدة = قيم المتغيرات الأصلية + معاملات العمود ع١ × Δ

٢٠ + $\frac{١}{٣}$ Δ = ٢٠ + $\frac{١}{٣}$ × Δ

٥ − $\frac{١}{٦}$ Δ = ٥ + (− $\frac{١}{٦}$) × Δ

وحتى يكون هذا الحل الجديد حلاً ممكناً feasible فيجب ألا تأخذ قيم س١ ، س٢ قيماً سالبة . ويعنى ذلك شرطين :

$$٢٠ + \frac{١}{٣}\Delta' \geq \text{صفر}$$

$$\frac{١}{٣}\Delta \geq -٢٠$$

وذلك يعنى $\Delta' \geq -٦٠$ ——— (١)

وأيضاً $٥ - \frac{١}{٦}\Delta \geq \text{صفر}$

$$-\frac{١}{٦}\Delta \geq -٥$$

بالضرب فى (−) $\frac{١}{٦}\Delta \leq ٥$

وذلك يعنى $\Delta \leq ٣٠$ ——— (٢)

بوضع الشرطين معاً نجد أن $٣٠ \geq \Delta \geq -٦٠$

ويعنى ذلك أن هناك مدى معين للتغير الذى يمكن أن يحدث فى الطرف الأيسر للقيد الأول ، دون أن يتغير نوع المتغيرات الأساسية الموجودة فى الحل الأمثل الحالى . وهذا المدى هو بين ٣٠ ، − ٦٠ . وطالما أن القيمة الحالية التى بدأنا بها للطرف الأيسر للقيد الأول هى ١٢٠ ، فإن المدى range الذى يمكن أن نأخذه قيمة الطرف الأيسر دون تغيير نوع المتغيرات الأساسية هو :

القيمة الأصلية + ٣٠ ≥ مدى الطرف الأيسر ≥ القيمة الأصلية − ٦٠

١٢٠ + ٣٠ ≥ مدى الطرف الأيسر ≥ ١٢٠ − ٦٠

١٥٠ ≥ مدى الطرف الأيسر ≥ ٦٠

أى أن تغير حجم الموارد المتاحة من الأخشاب فى حدود ٦٠ ، ١٥٠ وحدة (مع بقاء كل شىء على ما هو عليه) سوف لا يترتب عليه تغيير نوع المتغيرات الأساسية الموجودة فى الحل الأمثل الحالى وهى س١ ، س٢ . ولكن بالطبع سوف تتغير قيم هذه المتغيرات وبالتالى أرقام الربح المحققة .

وينبنى على ذلك ، أنه فى حدود هذا المدى يمكن دائماً معرفة القيم الموجودة للمتغيرات الأساسية دون الحاجة إلى حل المشكلة من جديد . ومثال ذلك إذا زادت الأخشاب المتاحة بعشرة وحدات فإن قيم الحل الأمثل الجديد يمكن التوصل إليها كما يلى :

المتغيرات الأساسية	قيم الحل الأمثل القديم	عمود $ع_1$ فى الحل الأمثل	قيم الحل الأمثل الجديد
$س_1$	٢٠	$\frac{1}{3}$	$٢٠ + \frac{1}{3}(١٠) = ٢٣\frac{1}{3}$
$س_2$	٥	$-\frac{1}{6}$	$٥ - \frac{1}{6}(٩) = ٣\frac{1}{3}$

ويكون الربح الجديد هو :

$(٢٣\frac{1}{3})(١٠) + (٣\frac{1}{3})(٩) = ٢٦٣\frac{1}{3}$ جنيه .

وبنفس المنطق فإن تخفيض كمية الأخشاب بعشر وحدات ، والذى يعنى أن تكون = − ١٠ يتم تحديد أثره كما يلى :

المتغيرات الأساسية	قيم الحل الأمثل القديم	عمود $ع_1$ فى الحل الأمثل	قيم الحل الأمثل الجديد
$س_1$	٢٠	$\frac{1}{3}$	$٢٠ + \frac{1}{3}(-١٠) = ١٦\frac{2}{3}$
$س_2$	٥	$-\frac{1}{6}$	$٥ - \frac{1}{6}(-١٠) = ٦\frac{2}{3}$

ويكون الربح الجديد هو :

$(١٦\frac{2}{3})(١٠) + (٦\frac{2}{3})(٩) = ٢٢٦\frac{2}{3}$ جنيه .

وقبل أن ننتهى من هذه النقطة نود أن نقدم طريقة رياضية (للراغبين فيها فقط) مختصرة لتحديد المدى range الذى يمكن أن تتغير فيه قيمة الطرف الأيسر فى أحد القيود دون تغيير نوع من المتغيرات الأساسية الموجودة فى الحل الأمثل .

بفرض أن :

$ش_د$ = القيمة الأصلية الموجودة فى الجانب الأيسر من القيد الدالى

$ق_ن$ = قيمة المتغير الأساسى النونى فى جدول الحل الأمثل النهائى

$ا_{دن}$ = قيمة المعاملات فى العمود الخاص بالمتغير ع المناظر للقيد الذى يتم تغيير طرفه الأيسر .

وذلك على أساس أن :

د = ١ ، ٢ ، .... ، عدد القيود

ن = ١ ، ٢ ، .... ، عدد المتغيرات الأساسية

فإن الحد الأدنى للطرف الأيسر فى القيد

= أكبر القيم من بين (القيمة الأصلية − قيمة المتغير الأساسى / قيمة المعاملات) لكل المتغيرات عند $ا_{دن} <$ صفر

= أعظم ($ش_د$ − $\frac{ق_ن}{ا_{دن}}$) لكل المتغيرات عند $ا_{دن} <$ صفر

= أقل القيم من بين (القيمة الأصلية − قيمة المتغير الأساسى / قيمة المعاملات) لكل المتغيرات عند $ا_{دن} <$ صفر

= أقل ($ش_د$ − $\frac{ق_ن}{ا_{دن}}$) لكل المتغيرات عند $ا_{دن} <$ صفر

وبتطبيق ذلك على القيد الأول . نبدأ من جدول الحل النهائى وعلى أساس أن القيمة الأصلية فى الطرف الأيسر هى ١٢٠ ونقوم بالخطوات الموضحة فى الجدول والتى يتضح منها أن الحد الأدنى هو ٦٠ .

المتغيرات الاساسية	ق$_{ن}$	أ$_{دن}$ فى عمود ع$_{٢}$	١ ÷ ٢	١٢٠ − ٣
س$_{١}$	٢٠	$-\frac{١}{٣}$	٦٠	٦٠
س$_{٢}$	٥	$-\frac{١}{٦}$	غير موجبة	غير موجبة

وللوصول إلى الحد الأقصى نقوم بعمل خطوات الجدول التالى :

المتغيرات الأساسية	ق$_{ن}$ ٠	أ$_{دن}$ فى عمود ع$_{١}$	١ ÷ ٢	١٢٠ − ٣
س$_{١}$	٢٠	$\frac{١}{٣}$	ليست سالبة	ليست سالبة
س$_{٢}$	٥	$-\frac{١}{٦}$	− ٣٠	١٢٠−(−٣٠) = ١٥٠

ومنه يتضح أن الحد الأقصى للجانب الأيسر للقيد الأول هو ١٥٠

وبنفس الإجراءات يمكن الوصول إلى الحد الأدنى والحد الأقصى الذى يمكن أن يأخذه الطرف الأيسر من القيد الثانى على النحو التالى :

(١) (٢) (٣)

المتغيرات الأساسية	ق$_{ن}$	أ$_{دن}$ فى عمود ع$_{٢}$	(١) ÷ (٢)	٦٠ − (٣)
س$_{١}$	٢٠	$-\frac{١}{٣}$	غير موجب	غير موجب
س$_{٢}$	٥	$\frac{٥}{١٢}$	١٢	٤٨

ومنه الحد الأدنى للطرف الأيسر (عدد ساعات العمل) = ٤٨

	(١)	(٢)	(٣)
المتغيرات الأساسية	$ق_{ن}$	$ا_{دن}$ فى عمود $ع_{٢}$	(١) ÷ (٢)	٦٠ − (٣)
$س_{١}$	٢٠	$-\frac{١}{٣}$	− ٦٠	١٢٠
$س_{٢}$	٥	$\frac{٥}{١٢}$	غير سالب	غير سالب

ومنه الحد الأقصى للطرف الأيسر (عدد ساعات العمل) = ١٢٠

نخلص من كل هذا إلى بعض الحقائق الهامة هى :

١ − إذا كان تغير قيمة الطرف الأيسر الخاص بأحد القيود فى حدود المدى الذى تم ذكره باستخدام تحليل المعنى أو المعادلات ، فإن نوع المتغيرات الأساسية الواردة فى جدول الحل الأمثل سوف يظل كما هو . ولا يعنى ذلك أن قيمها سوف تظل كما هى . ويمكن الوصول إلى القيم الجديدة لذات المتغيرات الأساسية عن طريق ضرب مقدار التغير × المعامل المناظر فى عمود العطل الخاص بالقيد ثم إضافة ذلك إلى القيمة المناظرة فى صف المتغيرات الأساسية .

٢ − إذا كان تغير قيمة الطرف الأيسر الخاص بأحد القيود ليس فى حدود المدى ، فإن نوع المتغيرات الأساسية الواردة فى جدول الحل الأمثل الحالى سوف يتغير . ولذلك يجب حل المشكلة من البداية مرة أخرى للوصول إلى الحل الأمثل الجديد .

ثانياً : التغير فى مساهمة الوحدة :

ويقصد ذلك التغير الذى يحدث فى ربح الوحدة أو تكلفة الوحدة فى دالة الهدف . فعادة ما يكون الممارسين فى حاجة إلى معرفة أثر التغير فى سعر

الوحدة وبالتالى ربحيتها على القرار الخاص بالمزيج الإنتاجى . فظروف السوق فى حالة ديناميكية مستمرة يصعب معها افتراض ثبات الأسعار . كذلك فإن تغير تكلفة الإنتاج نتيجة لظروف التشغيل الفعلية والتقدم التكنولوجى الدائم سوف يستلزم إعادة النظر فى توليفة الإنتاج من السلع المختلفة . والسؤال الآن هو : ما تأثير كل ذلك على الحل الأمثل الذى توصلنا إليه فى مشكلة البرمجة الخطية التى أمامنا ؟ قبل الإجابة على هذا السؤال يهمنا أن التغيير فى دالة الهدف لا يؤثر على الإطلاق على المنطقة الممكنة للحلول feasible area . فنحن نعلم ذلك من الطريقة البيانية . وهو صحيح أيضاً عند استخدام أسلوب السمبلكس وينبنى على ذلك أننا سوف نهتم بأثر هذا التغيير على مثالية optimality الحل الحالى ممثلاً فى الصف الأخير ح – ل . وهنا سوف نعالج حالتين مختلفتين . أما الأولى فهى أن يكون تغير مساهمة الوحدة خاص بأحد المتغيرات الغير أساسية . والثانية هى حالة أن يكون التغير خاص بأحد المتغيرات الأساسية .

(أ) التغير فى مساهمة الوحدة لأحد المتغيرات الغير أساسية :

طالما أن الذى يحكم الوصول إلى الحل الأمثل هو القيم الموجودة فى الصف الأخير (ح – ل) فى جدول السمبلكس النهائى وأن القيم الخاصة بالمتغيرات الغير أساسية فى هذا الجدول فى الصف الأخير تكون دائماً صفراً أو قيماً سالبة فى حالة تعظيم الربح ، فإننا يمكننا أن نضع القواعد التالية :

١ – إذا كانت الزيادة فى ربح الوحدة للمتغير الغير أساسى $<$ – (معامل المتغير فى الصف الأخير)

فإن تلك الزيادة سوف تؤدى إلى حلاً آخر جديد يدخل فيه المتغير هذا كمتغيراً أساسياً ويحقق ربحاً أعلى .

٢ – إذا كانت الزيادة فى ربح الوحدة للمتغير الغير أساسى = – (معامل المتغير فى الصف الأخير)

فإن تلك الزيادة سوف تؤدى إلى أن يظل الحل الحالى حلاً أمثل مع ظهور حلولاً أخرى مثلى تحقق نفس الربح .

٣ – إذا كانت الزيادة فى ربح الوحدة للمتغير الغير أساسى $<$
– (معامل المتغير فى الصف الأخير)
فإن تلك الزيادة سوف لا تؤدى إلى أى تغيير فى الحل الأمثل الحالى .

ويلاحظ هنا أننا قد ركزنا على زيادة الربح للوحدة ، نظراً لأن تخفيض ربح الوحدة للمتغير غير الأساسى لا يترتب عليه أى تغيير على الإطلاق .

مثـــال (٣ – ١) :

كان جدول السمبلكس النهائى لأحد حالات تعظيم الربح كما يلى (لا داعى لكل الأرقام فى مصفوفة المعاملات لإيضاح المعنى) .

ح			٢	٤	٣	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	متغيرات أساسية	قيم المتغيرات	س١	س٢	س٣	ع١	ع٢	ع٣
٤	س٢	$٦\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٣}$		٠			
٣	س٣	$١٦\frac{٢}{٣}$	$\frac{٥}{٦}$		٠			
صفر	ع٣	$٢٦\frac{٢}{٣}$	$-\frac{٥}{٣}$					
∴ ل		$٧٦\frac{٢}{٣}$	$\frac{٢٣}{٦}$	٤	٣	$\frac{٥}{٦}$	$\frac{٢}{٣}$	صفر
∴ ح – ل			$-\frac{١١}{٦}$	صفر	صفر	$-\frac{٥}{٦}$	$-\frac{٢}{٣}$	صفر

والمطلوب :

١ – إيضاح أثر التغير فى ربح الوحدة من س١ بزيادة قدرها ٣ جنيه

٢ – إيضاح أثر التغير فى ربح الوحدة من س$_1$ بزيادة قدرها $\frac{١١}{٦}$ جنيه

٣ – إيضاح أثر التغير فى ربح الوحدة من س$_1$ بزيادة قدرها ١ جنيه

الحـــل :

١ – واضح أن زيادة ربح الوحدة فى العمود الأول من ٢ إلى خمسة جنيهات سوف تؤدى إلى أن تصبح قيمة ح – ل فى العمود س$_1$ = $\frac{٢٣}{٦}$ = $\frac{٧}{٦}$ وهى قيمة موجبة مما يستلزم إدخال س$_1$ فى الحل نظراً لأن الحل الحالى ليس حلاً أمثل . وهنا يجب عمل التعديلات اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل الجديد وذلك حسب الطريقة المعتادة فى أسلوب السمبلكس إبتداءًا من الجدول الذى بين أيدينا وهو جدول الحل الأمثل الحالى قبل التغيير .

٢ – واضح أن زيادة ربح الوحدة فى العمود الأول إلى $\frac{١١}{٦}$ ٢ = $\frac{٢٣}{٦}$ سوف يترتب عليه أن تصبح قيمة ح – ل فى العمود س$_1$ = $\frac{٢٣}{٦}$ – $\frac{٢٣}{٦}$ = صفر . وحيث أن س$_1$ هى متغير غير أساس فإن ذلك يعنى إمكانية تغيير الحل دون التأثير على الربح وهذه هى حالة وجود أكثر من حل أمثل .

٣ – من الواضح أن تغير ربح الوحدة إلى ٣ جنيه فى العمود س$_1$ سوف يترتب عليه أن قيمة ح – ل فى العمود س$_1$ = ٣ – $\frac{٢٣}{٦}$ = – $\frac{١}{٦}$. وهى مازالت قيمة سالبة ويعنى ذلك أن الحل الأمثل الحالى هو الحل الأمثل الجديد أيضاً . فكل القيم فى الصف الأخير مازالت قيماً صفرية أو سالبة .

ويهمنا هنا الإشارة إلى أن نفس القواعد الثلاثة السابقة صحيحة فى حالة تقليل التكاليف أيضاً . كما أن الذى يهمنا هو حالة تخفيض تكلفة إنتاج الوحدة من المتغيرات غير الأساسية . وذلك لأن الزيادة فى تكلفة الوحدة لا تغير الحل الأمثل . ويمكن صياغة هذه القواعد على النحو التالى :

١ – إذا كان الانخفاض فى تكاليف الوحدة للمتغير الغير أساسى <
(معامل المتغير فى الصف الأخير)
فإن الحل الحالى سوف يتغير إلى حل جديد يدخل فيه هذا المتغير الحل

٢ – إذا كان الانخفاض فى تكاليف الوحدة للمتغير الغير أساسى =
= (معامل المتغير فى الصف الأخير)
فإن الحل الحالى سوف يظل حلاً أمثل بالإضافة إلى ظهور أكثر من حلاً أمثل .

٣ – إذا كان الانخفاض فى تكاليف الوحدة للمتغير الغير أساسى >
(معامل المتغير فى الصف الأخير)
فإن الحل الحالى سوف يبقى كما هو حلاً أمثل .

(ب) التغيير فى مساهمة الوحدة لأحد المتغيرات الأساسية :

نظراً لأن ربح (تكلفة) الوحدة من المتغيرات الأساسية والموجودة فى العمود الأول لجدول السمبلكس تستخدم فى حساب الصف ل وبالتالى الصف (ح – ل) لكل من أعمدة المتغيرات الأساسية وغير الأساسية . فإن أى تغيير فى قيمها سوف يؤدى إلى تغيير فى قيم (ح – ل) للمتغيرات غير الأساسية . (لاحظ هنا أن (ح – ل) للمتغيرات الأساسية لن تتأثر لأنها دائماً صفر فى جدول الحل الأمثل) . ومن المؤكد أن مقدار هذا التغيير يتوقف على معاملات أعمدة تلك المتغيرات الغير أساسية . لأن تحديد قيمة ل لكل عمود غير أساسى يتم عن طريق ضرب قيم ربح الوحدة من المتغيرات الأساسية فى المعاملات الموجودة فى أعمدة المتغيرات غير الأساسية

وبناء على ذلك من المحتمل أن نواجه أربعة حالات عند تعيير معامل أحد المتغيرات الأساسية :

التغير للوحدة	عمود المتغير غير الأساسى	
	به معاملات موجبة	به معاملات سالبة
زيادة فى مساهمة الوحدة	يصبح المتغير غير مرغوب أكثر	يصبح المتغير مرغوباً أكثر
تخفيض فى مساهمة الوحدة	يصبح المتغير مرغوباً أكثر	يصبح المتغير غير مرغوب أكثر

فإذا أصبح المتغير الغير أساسى غير مرغوب أكثر ، فإنه سوف يظل متغيراً غير أساسياً . ويعنى ذلك ، أن الحل الأمثل الحالى سوف يظل كما هو حتى بعد زيادة مساهمة الوحدة للمتغير الأساسى . وبالتالى فإننا أساساً نهتم بحالة أن يصبح المتغير الغير أساسى متغيراً مرغوباً أكثر لأننا فى هذه الحالة قد نغير الحل الأمثل الحالى . ويعنى ذلك تفصيلاً :

١ – عند زيادة مساهمة الوحدة للمتغير الأساسى فيجب علينا أن نفحص فقط المتغيرات الغير أساسية التى لها معاملات سالبة فى صف ذلك المتغير الأساسى .

٢ – عند تخفيض مساهمة الوحدة للمتغير الأساسى فيجب علينا أن نفحص فقط المتغيرات الغير أساسية التى لها معاملات موجبة فى صف ذلك المتغير الأساسى .

ومثال ذلك ... فى جدول السمبلكس النهائى الخاص بشركة الأثاث .

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$
١٠	$س_1$	٢٠	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	$س_2$	٥	صفر	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٥	١٠	٩	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح – ل			صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

بفرض أن ربح الوحدة من $س_1$ قد ارتفع إلى ١٢ جنيه فإننا يجب أن نفحص فقط احتمال أن تدخل $ع_2$ فى الحل . أما إذا انخفض ربح الوحدة من $س_1$ إلى ٧ جنيهات فإننا يجب أن نفحص فقط احتمال أن تدخل $ع_1$ فى الحل . كذلك فإن ارتفاع ربح الوحدة من $س_2$ إلى ١١ جنيه يقضى أن نفحص أثر إدخال $ع_1$ فى الحل ، وعند انخفاض ربح الوحدة من $س_2$ إلى ٦ جنيهات فإننا يجب أن نفحص احتمال إدخال $ع_2$ فى الحل .

والسؤال الآن : هل سوف يؤدى التغير فى مساهمة الوحدة من المتغير الأساسى إلى تغير دائماً فى الحل الأمثل ؟ بمعنى آخر هل هناك مدى ممكن أن تقع فيه قيمة مساهمة الوحدة ويظل الحل الأمثل كما هو ؟ الإجابة نعم .. ولنأخذ مثال على كيفية تحديد هذا المدى .

بفرض أن ربح الوحدة من $س_1$ قد زاد إلى (١٠ + Δ) فعلينا الآن أن نفحص المتغير الغير أساسى $ع_2$ حسب القاعدة السابقة . ويكون ذلك بحساب ل ، ح − ل الجديدة لهذا المتغير كما يلى :

$$ل = (١٠ + \Delta)(-\frac{١}{٣}) + ٩(\frac{٥}{١٢})$$

$$= \Delta\frac{١}{٣} - \frac{٥}{١٢}$$

$$ح - ل = صفر - (\Delta\frac{١}{٣} - \frac{٥}{١٢})$$

$$= \frac{٥}{١٢} - \Delta\frac{١}{٣}$$

وإذا أردنا ألا يتغير الحل الأمثل الحالى فإن القيمة المحسوبة للعمود $ع_2$ الجديدة يجب ألا تكون رقماً موجباً ويعنى ذلك رياضياً :

$$\Delta\frac{١}{٣} - \frac{٥}{١٢} \geq صفر$$

ومنها $\Delta\frac{١}{٣} \geq \frac{٥}{١٢}$

$$\Delta٤ \geq ٥$$

$$\Delta \geq \frac{٥}{٤}$$

(١) ــــــــــــ

ويعنى ذلك أن الحد الأقصى للزيادة والذى يجعل الحل الأمثل الحالى لا يتغير هو $\frac{٥}{٤}$ ، فإذا زاد ربح الوحدة بمقدار $\frac{٥}{٤}$ فإن الصف (ح − ل) للمتغير $ع_١$ سوف يصبح صفراً ويعنى ذلك عدم تغير الحل الأمثل الحالى ولكن مع وجود أكثر من حل أمثل . أما زيادة الربح للوحدة بما هو أكثر من $\frac{٥}{٤}$ فسوف تؤدى إلى تغيير الحل الأمثل الحالى .

وبفرض أن ربح الوحدة من $س_١$ قد انخفض إلى (١٠ − Δ) فعلينا الآن أن نفحص المتغير الغير أساسى $ع_١$ حسب القاعدة السابقة ويكون ذلك بحساب ل ، ح − ل الجديدة لهذا المتغير كما يلى :

$$ل = (١٠ - Δ) \frac{١}{٣} + ٩ (- \frac{١}{٦})$$

$$= \frac{١١}{٦} - Δ \frac{١}{٣}$$

ومنها ح − ل = صفر − $(\frac{١١}{٦} - Δ \frac{١}{٣})$

$$= \frac{١١}{٦} - Δ \frac{١}{٣}$$

وحتى يظل $ع_١$ خارج الحل فإن :

$$\frac{١١}{٦} - Δ \frac{١}{٣} \geq \text{صفر}$$

$$Δ \frac{١}{٣} \leq \frac{١١}{٦}$$

$$Δ ٢ \leq ١١$$

$$\therefore \quad Δ \leq \frac{١١}{٢} \qquad \text{———— (٢)}$$

ويعنى ذلك أن الحد الأقصى للتخفيض والذى يجعل الحل الأمثل الحالى لا يتغير هو $\frac{١١}{٢}$.

ومن (١) ، (٢) يمكن تحديد مدى ربح الوحدة من المتغير $س_١$ والذى إذا وقع فيه ربح وحدة $س_١$ لا يؤثر ذلك على الحل الأمثل الحالى ، كما يلى :

الحد الأعلى لمساهمة الوحدة = ١٠ + $\frac{٥}{٤}$ = $\frac{٥}{٤}$ ١٠ جنيه

الحد الأدنى لمساهمة الوحدة = ١٠ − $\frac{١١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ٤ جنيه

وبنفس الإجراء يمكن تحديد مدى ربح الوحدة من المتغير $س_2$ والذى إذا وقع فيه ربح الوحدة من $س_2$ لا يؤثر ذلك على الحل الأمثل الحالى ، وسوف نجد أنه :

الحد الأعلى لمساهمة الوحدة = ٩ + ١١ = ٢٠ جنيه

الحد الأدنى لمساهمة الوحدة = ٩ − ١ = ٨ جنيه

واضح من هذا المثال أن الإجراء يعد بسيطاً نسبياً ، ويرجع ذلك أساساً إلى أن هذا المثال المحدود به متغيرين أساسيين فقط . أما فى حالة وجود أكثر من متغيرين ، فلتحديد قيمة Δ يجب وضع الشروط الخاصة بكل صف إلى جوار بعضها البعض لتحديد قيمة Δ التى تحقق جميع الشروط معاً . ويمكن وضع هذا الإجراء العام فى شكل رياضى باستخدام الرموز التالية :

$ح_ن$ = ربح الوحدة للمتغير الأساسى النونى فى جدول الحل النهائى الحالى

$(ل - ح)_د$ = القيمة فى الصف الأخير للمتغير الغير أساسى الدالى

$ا_{ند}$ = المعامل الموجود فى صف المتغير الأساسى النونى وعمود المتغير الغير أساسى الدالى

حيث ن = ١ ، ٢ ، ... ، عدد المتغيرات الأساسية

د = ١ ، ٢ ، ... ، عدد المتغيرات الغير أساسية

فإن الحد الأدنى لرقم مساهمة الوحدة فى المتغير الأساسى :

$$= \text{أكبر القيم من بين } \left(\text{ربح الوحدة للمتغير الأساسى} + \frac{\text{قيمة الصف الأخير للمتغير غير الأساسى}}{\text{المعامل}} \right) \text{ لكل المتغيرات الغير أساسية} < \text{صفر عند } ا_{ن د}$$

$$= \text{أكبر} \left(ح_{ن} + \frac{(ل - ح)_{د}}{ا_{ن د}} \right) \text{ لكل المتغيرات الغير أساسية} < \text{صفر عند } ا_{ن د}$$

وكذلك فإن الحد الأقصى لرقم مساهمة الوحدة فى المتغير الأساسى :

$$= \text{أقل القيم من بين } \left(\text{ربح الوحدة للمتغير الأساسى} + \frac{\text{قيمة الصف الأخير للمتغير غير الأساسى}}{\text{المعامل}} \right) \text{ لكل المتغيرات الغير أساسية} > \text{صفر عند } ا_{ن د}$$

$$= \text{أقل} \left(ح_{ن} + \frac{(ل - ح)_{د}}{ا_{ن د}} \right) \text{ لكل المتغيرات الغير أساسية} > \text{صفر عند } ا_{ن د}$$

ولنأخذ الآن مثالاً به ثلاثة متغيرات أساسية كما فى جدول السمبلكس النهائى التالى :

ح			٥	١٢	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	$س_{١}$	$س_{٢}$	$ع_{١}$	$ع_{٢}$	$ع_{٣}$
صفر	$ع_{١}$	١٠	صفر	صفر	١	$-\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٨}$
٥	$س_{١}$	١٦	١	صفر	صفر	$\frac{٤}{٥}$	$-\frac{٨}{٥}$
١٢	$س_{٢}$	١٥	صفر	١	صفر	صفر	١
ل		٢٦٠	٥	١٢	صفر	٤	٤
ل - ح			صفر	صفر	صفر	- ٤	- ٤

والمطلوب : تحديد الحد الأدنى والأعلى للمتغير $س_1$.

الحـــل :

حيث أن $ا_{ن د}$ الموجب الوحيد هو $\frac{٤}{٥}$ فى أعمدة المتغيرات الغير أساسية فى صف $س_1$ فإن الحد الأدنى :

$$= (٥ + \frac{-٤}{\frac{٤}{٥}}) = \text{صفر}$$

وكذلك فإن $ا_{ن د}$ السالب الوحيد هو $-\frac{٨}{٥}$ فى أعمدة المتغيرات الغير أساسية فى صف $س_1$ فإن الحد الأعلى :

$$= (٥ + \frac{-٤}{-\frac{٨}{٥}}) = ٥ + ٢\frac{١}{٢} = ٧\frac{١}{٢}$$

ويعنى ذلك أى قيمة لربح الوحدة من المتغير $س_1$ بين صفر ، $٧\frac{١}{٢}$ سوف لا تؤدى إلى تغيير الحل الأمثل الحالى .

ثالثاً : التغير فى معاملات القيود :

ويقصد بذلك تغير عدد الوحدات اللازمة من كل مورد لكل وحدة من المتغيرات . ويعبر عنها بالمعاملات التكنولوجية Technological Coefficients نظراً لأن قيمها تكون محكومة إلى حد كبير بنوع التكنولوجيا المستخدمة . ويحدث كثيراً أن تتغير هذه المعاملات نظراً لتغير نوع الآلات أو الأفراد أو لتغير المزيج المستخدم من كل من الآلات والأفراد . وفى هذه الحالة يهتم متخذ القرار بتأثير هذا التغير على الحل الأمثل .

يتوقف هذا التأثير على ما إذا كان المعامل خاص بمتغيراً غير أساسياً أم يخص متغيراً أساسياً .

(أ) التغير فى معامل متغير غير أساسى :

إذا تغير المعامل الخاص بأحد المتغيرات الغير أساسية فى أحد القيود فى المشكلة الأصلية فإن ذلك لن يؤثر على الوصول إلى الحل النهائى الذى توصلت إليه قبل التغيير ، بمعنى أن الحل المثالى السابق سوف يكون دائماً حلاً ممكناً (وليس بالضرورة أمثل) بعد التغيير . وطالما أن هذا المتغير هو متغيراً غير أساسياً فيجب التأكد من أثر التغيير فى المعامل على الرقم الموجود فى الصف قبل الأخير والخاص بهذا المتغير . فإذا أصبح رقماً موجباً فإن ذلك يعنى أن الحل الحالى (الذى كان أمثلاً والذى هو ممكن) ليس حلاً أمثل ويجب عمل خطوة أخرى للوصول إلى الحل الأمثل .

ولذلك فإننا يمكننا مبدئياً تحديد أثر التغير على احل الحالى كما يلى :

فى جدول السمبلكس النهائى التالى :

ح			٢	٤	٣	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	متغيرات أساسية	قيم المتغيرات	س١	س٢	س٣	ع١	ع٢	ع٣
٤	س٢	$٦\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٣}$			$\frac{١}{٣}$		
٣	س٣	$١٦\frac{٢}{٣}$	$\frac{٥}{٦}$			$-\frac{١}{٦}$		
صفر	ع٣	$٢٦\frac{٢}{٣}$	$-\frac{٥}{٣}$			$-\frac{٢}{٣}$		
ل		$٧٦\frac{٢}{٣}$	$\frac{٢٣}{٦}$	٤	٣	$\frac{٥}{٦}$	$\frac{٢}{٣}$	صفر
ح - ل			$-\frac{١١}{٦}$	صفر	صفر	$-\frac{٥}{٦}$	$-\frac{٢}{٣}$	صفر

* لا نحتاج إلى القيم الغير واردة بالجدول لأنها سوف لا تتغير .

بفرض أن القيد الأول $٣ س_١ + ٤ س_٢ + ٢ س_٣ \geq ٦٠$ الخاص بهذه المشكلة قد تغير إلى $٥ س_١ + ٤ س_٢ + ٢ س_٣ \geq ٦٠$

فإن التغير الذى سوف يطرأ على جدول الحل النهائى الجديد يمكن حسابه باستخدام العمود $ع_١$ والعمود $س_١$ وذلك على أساس أن :

$\Delta = ٥ - ٣ = ٢$ = مقدار التغير فى المعامل .

الصف	المعاملات القديمة فى العمود $س_١$	المعاملات فى العمود $ع_١$	المعاملات الجديدة فى العمود $س_١$
$س_٢$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣} + ٢ (\frac{١}{٣}) = ١$
$س_٣$	$\frac{٥}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{٦} - ٢ (\frac{١}{٦}) = \frac{٣}{٦}$
$ع_٣$	$-\frac{٥}{٣}$	$-\frac{٢}{٣}$	$-\frac{٥}{٣} - ٢ (\frac{٢}{٣}) = -٣$

وبذلك يصبح الجدول الجديد هو :

ح			٢	٤	٣	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	متغيرات أساسية	قيم المتغيرات	س١	س٢	س٣	ع١	ع٢	ع٣
٤	س٢	٦ ٢/٣	١			١/٣		
٣	س٣	١٦ ٢/٣	١/٢			-١/٦		
صفر	ع٣	٢٦ ٢/٣	-٣			-٢/٣		
ل		٧٦ ٢/٣	١١/٢	٤	٣	٥/٦	٢/٣	صفر
ح - ل			-٧/٢	صفر	صفر	-٥/٦	-٢/٣	صفر

ويلاحظ على هذا الجدول أن الحل القديم لم يتغير ويعنى ذلك أن هذا الحل هو حلاً ممكناً feasible . كذلك فإن التغير الوحيد هو التغير فى معاملات العمود الخاص بالمتغير الغير أساسى س١ . لاحظ الآن أننا قلنا أن هذا الحل الحالى ممكناً ولم نقل أمثل . وللتأكد من أنه أمثل يجب أن نحسب قيمة (ح - ل) الجديدة للمتغير س١ فى الجدول الأخير . وهى :

$$= ٢ - (٤ \times ١ + ٣ \times \frac{١}{٢} + \text{صفر}) = -٣\frac{١}{٢}$$

وهى رقماً سالباً وذلك يعنى أن الحل الأمثل السابق لم يتغير والحل الجديد هو تماماً الحل القديم . ولكن ذلك لا يعنى دائماً أن الحل الأمثل الجديد بعد التغيير سوف يظل كما هو ولذلك يأتى السؤال الهام المشابه لمعظم تحليلات الحساسية السابقة .. ما هو المدى الذى يمكن أن تقع فيه قيمة المعامل لأحد المتغيرات غير الأساسية دون أن يؤثر ذلك على الحل الأمثل ؟

للإجابة على هذا يمكن التعويض عن (٥ − ٣) بالقيمة Δ حتى تعبر عن قيمة التغير بشكل عام ، وبذلك فإن القيد الأول

$$٣ س_١ + ٤ س_٢ + ٢ س_٣ \leq ٦٠$$

سوف يصبح

$$(٣ + \Delta) س_١ + ٤ س_٢ + ٢ س_٣ \leq ٦٠$$

والقيم الجديدة فى عمود المتغير $س_١$ فى الجدول الجديد سوف تصبح :

الصف	المعاملات القديمة فى العمود $س_١$	المعاملات فى العمود $ع_١$	المعاملات الجديدة فى العمود $س_١$
$س_٢$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\Delta \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}$
$س_٣$	$\frac{٥}{٦}$	$-\frac{١}{٦}$	$\Delta \frac{١}{٦} - \frac{٥}{٦}$
$ع_٣$	$-\frac{٥}{٣}$	$-\frac{٢}{٣}$	$\Delta \frac{٢}{٣} - \frac{٥}{٣} -$

ومنها يمكن حساب ل ، ح – ل الخاصة بالعمود $س_1$

$$ل = ٤ (\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} \Delta) + ٣ (\frac{٥}{٦} - \frac{١}{٦} \Delta) + صفر$$

$$= \frac{٢٣}{٦} - \frac{١}{٦} \Delta$$

$$ح - ل = ٢ - (\frac{٢٣}{٦} - \frac{١}{٦} \Delta)$$

$$= - \frac{١١}{٦} + \frac{١}{٦} \Delta$$

فإذا رغبنا فى ألا يتغير الحل الأمثل الحالى فإن الشرط هو :

$$\frac{١}{٦} \Delta - \frac{١١}{٦} \geq صفر$$

$$\frac{١}{٦} \geq \frac{١١}{٦}$$

ويعنى ذلك $\Delta \geq ١١$

وطالما أن القيمة الجديدة للمعامل = ٣ + Δ

Δ = القيمة الجديدة – ٣

فإن (القيمة الجديدة – ٣) $\geq$ ١١

∴ القيمة الجديدة $\geq$ ١٤

ويعنى ذلك أنه طالما أن القيمة الجديدة للمعامل الخاص بالمتغير $س_1$ فى القيد الأول $\geq$ ١٤ فإن الحل الأمثل الحالى سوف لا يتغير بسبب تغير قيمة المعامل . أما إذا المعامل الجديد أكبر من ١٤ فإن (ح – ل) سوف تصبح رقماً موجباً ويعنى ذلك أن الحل السابق ليس هو الحل الأمثل ، ويجب عمل خطوة واحدة إضافية عليه هدفها إدخال $س_1$ فى الحل للوصول إلى الحل الأمثل الجديد .

(ب) التغير فى معامل متغير أساسى :

يعد تحليل أثر التغير فى معامل أحد المتغيرات الأساسية فى أحد القيود أكثر صعوبة وتعقيداً من كل الحالات السابقة . ويرجع ذلك إلى خاصية أساسية وهى أن قيمة المتغير الأساسى فى جدول السمبلكس النهائى تكون قيمة موجبة وعلى ذلك فإن تغير المعامل الخاص بها سوف يكون له تأثير ما على قيم المتغيرات الأساسية الأخرى فى الحل النهائى . ويترتب ذلك أن الحل الجديد يجب التأكد من أنه ممكناً Feasibility كما يجب التأكد أنه مازال حلاً أمثل optimality .

والخطوة الأولى ، هى أن نحسب المعاملات الجديدة للمتغير الأساسى الذى يتغير معامله بنفس الطريقة التى قمنا بها فى حالة المتغير الغير أساسى . دعنا نأخذ مثال حتى يمكن إيضاح ذلك :

فى جدول السمبلكس النهائى الخاص بمشكلة الأثاثات التالى :

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س١	س٢	ع١	ع٢
١٠	س١	٢٠	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	س٢	٥	صفر	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٥	١٠	٩	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح − ل			صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

بفرض أن القيد الأول ٥ س١ + ٤ س٢ ≤ ١٢٠

قد تغير إلى ٦ س١ + ٤ س٢ ≤ ١٢٠

والمطلوب : إيضاح أثر ذلك على الحل الأمثل الحالى .

لتحديد أثر ذلك نبدأ بتحديد معاملات المتغير $س_1$ فى عمود $س_1$ فى جدول السمبلكس الأخير كما يلى :

الصف	المعاملات القديمة فى العمود $س_1$	المعاملات فى العمود $ع_1$	المعاملات الجديدة فى العمود $س_1$
$س_1$	١	$\frac{١}{٣}$	$١ + \frac{١}{٣}(١) = \frac{٤}{٣}$
$س_2$	صفر	$-\frac{١}{٣}$	$صفر - \frac{١}{٣}(١) = -\frac{١}{٣}$

وذلك على أساس أن $\Delta = ٦ - ٥ = + ١$

وبذلك فإن الجدول التالى الجديد يكون :

	ح		١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$
١٠	$س_1$	٢٠	$\frac{٤}{٣}$	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	$س_2$	٥	$-\frac{١}{٣}$	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$

ولكن هذا الجدول لا يحقق شرط المتغير الأساسى الذى يجب أن يكون عموده أحد مكونات أعمدة مصفوفة الوحدة ولذلك نقوم بعمل تغيير

باستخدام بعض العمليات الرياضية من شأنه أن يجعل العمود $س_1$ به (١) ، (صفر) فى الصف الأول والثانى على التوالى . وتكون نتيجته ما يلى :

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$
١٠	$س_1$	١٥	١	صفر	$\frac{١}{٤}$	$-\frac{١}{٤}$
٩	$س_2$	١٠	صفر	١	$-\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٣}$
ل		٢٤٠	١٠	٩٠	$\frac{٢١}{١٢}$	$\frac{٦}{١٢}$
ح - ل			صفر	صفر	$-\frac{٢١}{١٢}$	$-\frac{٦}{١٢}$

وباختبار مثالية الحل يتضح أن ذلك هو حلاً أمثل وفيه :

$س_1 = ١٥$

$س_2 = ١٠$

$ع_1 =$ صفر

$ع_2 =$ صفر

وربح الحل الأمثل = ٢٤٠