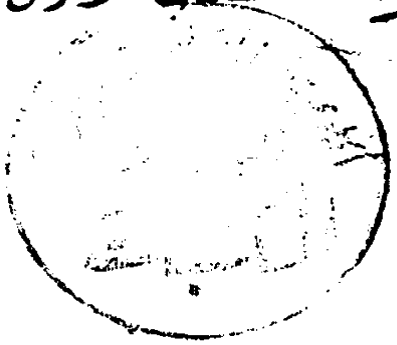
الموسوعة الكمية في المحاسبة
الكتاب الأول



بحوث العمليات
في
الإدارة والمحاسبة

٧٥٩٤
٥٩٠
٧٨٩١

تأليف

دكتور
حمدي سباوي فهمي

كلية التجارة — جامعة القاهرة

الناشر : المركز الدولي العلوم الادارية I.M C

الباب الثالث

البرامج الخطية والتكاليف

LINEAR PROGRAMMING & COST NG

يعتبر البرامج الخطية أسلوب رياضى لحل مشاكل استغلال الموارد والإمكانيات المحدودة بطريقة تحقق للمشروع أقصى أرباح ممكنة أو تحمل المشروع أقل تكلفة ممكنة . ويعرف الاقتصاديون أسلوب البرامج الخطية بأنه طريقة رياضية لتحميل مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هـــذه الموارد بينما تكون جميع القرارات متشابكة لأنها تقع جميعا تحت مجموعة من القيود والحدود الثابتة .

ويسمى هذا الأسلوب بالبرامج حيث أنه يتكون من مجموعة من البرامج والحلول الممكنة ويعمل على اختيار الأفضل منها، كما يتصف بالخطية Lniearity لغرض وجود علاقات خطية بين النواتج والمخرجات وبين هذه الموارد المحدودة أو المدخلات المختلفة بحيث تتغير قيمة المخرجات تبعا لتغير المدخلات ، بنفس النسبة وفى نفس الاتجاه .

أى أننا ننظر إلى التكاليف المتغيرة بأنها متغيرة ١٠٠ ٪ دون النظر إلى العوامل المختلفة فى الحياة العملية التى تسبب عدم تحقيق هذه النسبة مثل تغيير أسعار المواد باختلاف الكميات المشتراة وغير ذلك من الظروف التى تخرج عن إرادة المشروع ويصعب قياسها . كذلك عند تطبيق صفة الخطية فى العلاقات بين المخرجات والمدخلات نهمل العوامل التى تقلل من نسبة التغير

المباشر عن ١٠٠٪ مثل انخفاض أسعار المبيعات أو مـــواد الإنتاج أو تحكمات واختناقات الإنتاج من عوامـــل التعطيل سواء الآلات أو العمال وخلافه .

ويرجع أسلوب البرامج الخطية أصلا إلى سنة ١٩٢٠ عندما قدم واسيلى ليونتيف Wassily Leontief أسلوب تحليل المدخلات والمخرجات ولكن ترجع أهمية إستخدام أسلوب البرامج الخطية إلى جـــورج دانتزج George Dantzig عندما قدم أسلوب السمبلكس Simplex Method لحل مشاكل البرامج الخطية سنة ١٩٤٧ .

وبتطور الإدارة العلمية للمشروعات الكبيرة ازداد استخدام البرامج الخطية فى حل الكثير من مشاكل الإدارة فى التوزيع والتفضيل بين البدائل المختلفة مثل :

١ — تخطيط الإنتاج وتحديد سياسة الإنتاج لصناعة واحدة أو تعدد المنتجات .

٢ — الاختيار بين طرق الإنتاج المختلفة وجدولة الآلات فى العمليات الصناعية .

٣ — الاختيار بين طرق توزيع المنتجات على الأسواق المختلفة لتقليل نفقات النقل لأقل حد ، وغير ذلك من المشاكل المختلفة .

الشروط الواجب توافرها لتطبيق اسلوب البرامج الخطية فى حل المشاكل :

ويمكن تلخيص الشروط الواجب توافرها فى المشكلة حتى يمكن تطبيق أسلوب البرامج الخطية فى حلها فيما يأتى :

المنشود قابلة جميعا للقياس الكمى حتى يمكن التعبير عنها بمعادلات أو معباينات خطية .

١ — أن يكون هناك هدف مطلوب تحقيقه وعادة تهدف المشروعات إلى تضخيم الربح لأقصى حد ممكن أو تخفيض التكاليف لأدنى حد ممكن.

ويجب توضيح أن الربح المطلوب تضخيمه هو الربح الإجمالى أو عائد المساهمة ويتكون من ثمن البيع مطروحا منه التكاليف المتغيرة حيث يمكن إيجاد علاقة خطية بين العاملين أما الربح الصافى فلا توجد بينه وبين المبيعات أى علاقة خطية بسبب المصروفات الثابتة التى تخصم من الربح الإجمالى لحساب الربح الصافى . وكذلك يجب توضيح أن التكاليف المطلوب تخفيضها إلى أدنى حد هى التكاليف المتغيرة لوجود علاقة خطية بينها وبين حجم الإنتاج وبطبيعة الحال إذا انخفضت التكاليف المتغيرة ستنخفض بالتبعية مجموع التكاليف .

٢ — أن يكون هناك أكثر من طريقة لحل المشكلة وتوافر فى هذه الحلول أو البدائل المختلفة شرط يناسبها مع الموارد المحـــــددة وإمكانية تنفيذها فى حدود الشروط الموجودة . ويجب أن يتم الاختيار بين هذه البدائل بحيث يتمشى مع الهدف المنشود .

٣ — ضرورة وجود قيود ثابتة وحدود للموارد والإمكانيات ، ولولا وجود هذه القيود والحدود الثابتة لما كان هناك مشكلة ولما كان هناك دافع لاستخدام أسلوب البرامج الخطية .

٤ ـ يجب أن تكون هناك علاقات بين العوامل المتغيرة فى المشكلة كما يجب أن تعبر عن هذه العلاقات كميا وسبق أن ذكرنا فرض وجود العلاقات الخطية بين العوامل بعضها البعض .

٥ ـ يجب أن تكون كافة بيانات المشكلة وقيودها وكذلك الهد

عناصر وخطوات أسلوب البرامج الخطية:

ويمكن تلخيص عناصر وخطوات حل المشاكل بأسلوب البرامج الخطية فيما يلى :

١ — تمثيل الهدف المنشود فى شكل دالة رياضية لتضخيم الأرباح أو تخفيض التكاليف .

والتعبير عن ذلك يجب معرفة معدل الربح لكل وحدة من وحدات كل منتج أو معدل التكاليف المتغيرة لكل منتج من المنتجات المختلفة . فإن كان لمصنع ما منتجين س ، ص وكان معدل الربح لوحدة المنتج الأول (س) ١٠ جنيها ومعدل الربح لوحدة المنتج الثانى (ص) ٨ جنيهات فإن الدالة الرياضية الممثلة لتضخيم الأرباح يمكن أن تكتب كالتالى :

د (ر) = ١٠ س + ٨ ص

٢ — تمثيل القيود الثابتة والعوامل المحددة للبدائل المختلفة بمعادلات أو متباينات رياضية (وعادة متباينات) فإذا كانت طاقة القسم الإنتاجى الأول ٩٠ ساعة عمل مباشر أسبوعيا وطاقة القسم الإنتاجى الثانى ٤٨ ساعة عمل مباشر أسبوعياً . وإذا كانت الوحدة من المنتج س تحتاج إلى ٦ ساعات عمل مباشر فى القسم الإنتاجى الأول وساعتين عمل مباشر فى القسم الإنتاجى الثانى بينما تحتاج الوحدة من المنتج ص إلى ٣ ساعات عمل مباشر فى القسم الإنتاجى الأول و ٤ ساعات عمل مباشر فى القسم الإنتاجى الثانى فإنه يمكن تمثيل القيود المحددة بالطاقة فى الأقسام الإنتاجية على شكل متباينات كالآتى :

بالنسبة للقسم الإنتاجى الأول :

[مجموع ساعات العمل اللازمة للمنتج (س) + مجموع ساعات العمل اللازمة للمنتج ص ≤ ٩٠ ساعة]

أى أن ٦ س + ٣ ص < ٩٠ ساعة عمل مباشر

وكذلك بالنسبة للقسم الإنتاجى الثانى :

مجموع ساعات العمل اللازمة للمنتج (س) + مجموع ساعات العمل اللازمة المنتج (ص) ≧ ٤٨

أى أن ٢ س + ٤ ص ≧ ٤٨ ساعة عمل مباشر .

٣ — فى جميع المشاكل المراد حلها بأسلوب البرامج الخطية يشترط دائما أن يسمح جميع العوامل المتغيرة (وهى عدد الوحدات المنتجة من كل منتج فى فرضنا السابق موجبة . أى أن :

عدد الوحدات المنتجة من المنتج س ≧ صفر

وكذلك عدد الوحدات المنتجة من المنتج ص ≧ صفر

ويسمى هذا الشرط شرط عدم السلبية Nonnegative Condition

المعادلات والمتباينات Equation & Inequations

تعنى المعادلات المساواة التامة بين طرفيها بينما تعنى المتباينة أن أحد الأطراف أقل من (<) أو أكثر من (>) الطرف الآخر : ويلاحظ أن علامتى < ، > تعنى فى اللغة الإنجليزية عكس مفهومها فى اللغة العربية ويرجع أصل الإختلاف إلى أن الجانب المفتوح من العلامة يجب أن يتجه إلى الطرف الأكبر دائما وبينما نكتب فى اللغة العربية من اليمين إلى اليسار نكتب فى اللغة الإنجليزية من اليسار إلى اليمين . ومثال ذلك :

٥ + ٣ < ١٠ نكتب بالإنجليزية 10 > 3 + 5

ونستعمل كذلك المتباينات علامات يساوى لـ أو أقل من (≤) وعلامة يساوى لـ أو أكثر من (≥) .

والمقارنة بين المعادلات والمتباينات فى أثر العمليات الأساسية على أطرافها نستعرض الحالات الآتية :

العمليات	معادلات : ا = ب	متباينات : ا > ب	أوجه الشبه أو الاختلاف
١ – إضافة مقدار ثابت (ث) إلى كل جانب	ا + ث = ب + ث	ا + ث > ب + ث	لا تغيير فى كليهما
٢ – طرح مقدار ثابت (ث) من كل جانب .	ا – ث = ب – ث	ا – ث > ب – ث	لا تغيير فى كليهما
٣ – ضرب كل من الجانبين فى مقدار ثابت موجب (ث) .	ا ث = ب ث	ا ث > ب ث	لا تغيير فى كليهما
٤ – قسمة كل من الجانبين فى مقدار ثابت موجب (ث)	$\frac{ا}{ث} = \frac{ب}{ث}$	$\frac{ا}{ث} > \frac{ب}{ث}$	لا تغيير فى كليهما
٥ – ضرب كل من الجانبين فى مقدار ثابت سالب	– ا ث = – ب ث	– ا ث < – ب ث	لا تغيير فى المعادلة ولكن انعكست علامة المتباينة وأصبحت (<) بدلاً من (>) .
٦ – قسمة كل من الجانبين على مقدار ثابت سالب .	$-\frac{ا}{ث} = -\frac{ب}{ث}$	$-\frac{ا}{ث} < -\frac{ب}{ث}$	

ويتضح مما سبق تشابه أثر العمليات الرئيسية على كل من المعادلات والمتباينات باستثناء واحد وهو ضرب أو قسمة كل من الجانبين فى مقدار سالب حيث تنعكس علامة المتباينة نظراً لأن العلاقة بين المقادير الموجبة عكس العلاقة بين المقادير السالبة : فبينما تكون ٥ أ كبر من ٣ نجد أن — ٥ أصغر من — ٣ .

التمثيل البيانى للمعادلات والمتباينات الخطية :

تطلق صفة الخطية على كل من المعادلات والمتباينات إذا كانت العلاقة بين المتغيرات من الدرجة الأولى أى خالية من أى قوى (أو أسس) المتغيرات. فمثلا يطلق على المعادلة : ص = ا + ب س معادلة خطية (لأنها معادلة من الدرجة الأولى) بينما يطلق على المعادلة : ص = ا + ب س + حـ س^{٢} معادلة غير خطية من الدرجة الثانية وهكذا . وتمثل المعادلة الخطية بيانيا بخط مستقيم يتحدد بالوصل بين أى نقطتين تمثلان المعادلة . وعادة تحدد النقطتان على محورى س (عندما تكون ص = صفر) وعلى محور ص (عندما تكون س = صفر) ثم يصل الخط بين النقطتين :

مثال ٤/١ :

إرسم الخط المستقيم الممثل للمعادلة : ٦س + ٣ص = ٩٠

أولا : تحدد النقطتين على محورى س ، ص كالآتى :

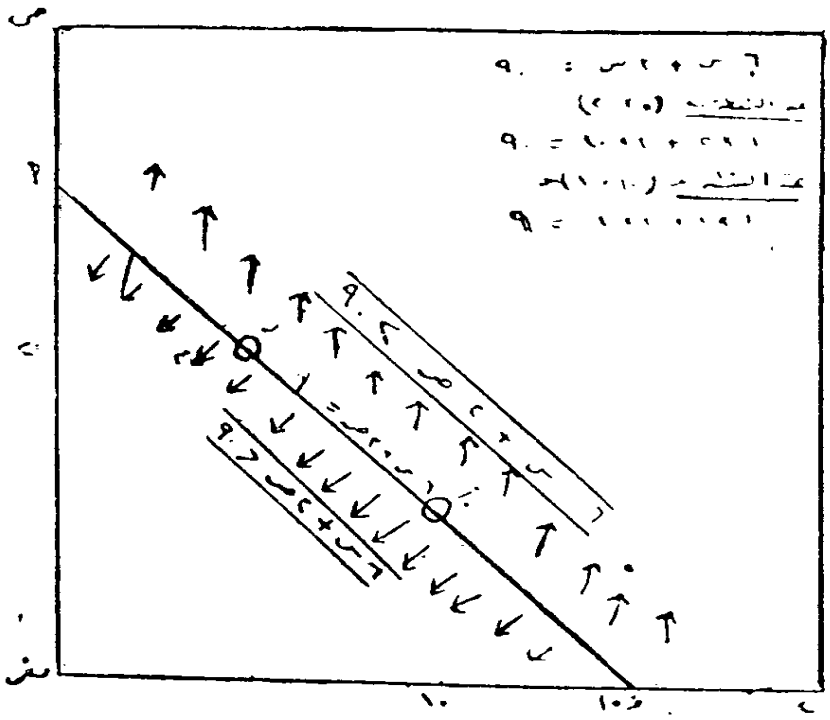
(ا) عندما تكون س = صفر ∴ ٣ص = ٩٠ ، ص = ٣٠

أى أن النقطة الأولى (ا) هى (صفر ، ٣٠) حيث تمثل القراءة الأولى س والثانية ص .

(ب) عندما تكون ص = صفر ∴ ٦ س = ٩٠ س = ١٥

أى أن النقطة الثانية (ب) هى (١٥ ، صفر) حيث تمثل القراءة الأولى س والثانية ص .

وإذا مثلنا النقطتين بيانيا ووصلنا بينهما بخط مستقيم (ا ى) كان هذا الخط يمثل المعادلة بمعنى أنه يمكن إثبات صحة المعادلة باستخدام أى نقطة على الخط بدلا من س ، ص كما هو مبين بالشكل رقم (١/٣) .



شكل ٣/١ التمثيل البيانى للمتباينات

وبينما تمثل المعادلة الخطية بخط مستقيم تمثل المتباينة الخطية بالمساحة الواقعة أسفل أو على الخط المستقيم . فمثلا المتباينة ٦ س + ٣ ص < ٩٠ تمثل بالمساحة الواقعة فوق الخط المستقيم ا ب حـ ى بينما المتباينة ٦س+ ٣ص < ٩٠ تمثل بالمساحة الواقعة تحت الخط المستقيم ا ب حـ ى . أما المتباينة ٦ س + ٣ ص ≤ ٩٠ تمثل بالخط المستقيم ا ب حـ ى والمساحة الواقعة فوقه بينما المتباية ٦ س + ٣ص ≤ ٩٠ تمثل بالخط المستقيم ا ب حـ ى والمساحة الواقعة تحته . وحتى يمكن تحديد اتجاه المساحة الممثلة للمتباينة عما إذا كانت تقع أعلى الخط المستقيم أو تحته نقارن بين قيمة الأصل (وهى الصفر) مع قيمة المعادلة التى يمثلها الخط فإذا كانت قيمة الأصل أقل من قيمة المعادلة كانت

المساحة تجاه نقطة الأصل أقل من المعادلة وتمثل المتباينة ذات العلامة أقل من (<) . وبالعكس المساحة فوق الخط تمثل المتباينة ذات العلامة أكثر من (>) ،

أما إذا كانت قيمة الأصل (وهى الصفر) أكبر من قيمة المعادلة التى يمثلها الخط المستقيم (عندما تكون قيمتها رقم سالب) فإن المساحة تحت الخط وتجاه نقطة الأصل تمثل المتباينة ذات العلامة أكثر من (<) وهكذا .

ويمكن حل المعادلات الخطية بيانياً بنقطة واحدة وهى نقطة تقاطع الخطوط المستقيمة الممثلة المعادلات حيث يتوافر فى هذه النقطة جميع شروط وعلاقات المعادلات المختلفة . أما المتباينات الخطية ينحصر حلها المساحة المشتركة الممثلة لكافة المتباينات المختلفة .

وتمثل هذه المساحة مجموعة من النقط التى تتوافر شروط المتباينات فى كل منها . ولما كانت قيمة كل متباينة غير محددة بنقطة واحدة فإن القيم المختلفة لكل هذه النقط يختلف عن الآخر (رغم إتفاقه فى حدود المتباينات المختلفة) وتكون العبرة باختيار النقطة ذات القيمة الأفضل . فإذا كانت الدالة المستهدفة تمثل أرباحا فنبحث عن القيمة الأفضل التى تحدد أكثر ربح ممكن ، أما إذا كانت الدالة تمثل تكاليف فنبحث عن القيمة الأفضل التى تحدد أقل تكلفة ممكن . وبينما تكون كل نقطة فى هذه المساحة المشتركة ممثلة لحل ممكن طبقا للمتباينات فاننا نبحث عن النقطة التى تحدد الحل الأفضل ، والبرامج الخطية هى الأسلوب الرياضى الذى يساعدنا على تحديد هذه النقطة ذات الحل الأفضل .

وستنقسم المناقشة فى الباب الثالث إلى الفصول الآتية :

الفصل الأول : طريقة السمبلكس ومشاكل تضخيم الأرباح .

الفصل الثانى : طريقة السمبلكس ومشاكل تخفيض التكاليف .

الفصل الثالث : طرائق خاصة فى البرامج الخطية .

الفصل الأول

من

الباب الثالث

طريقة السمبلكس ومشاكل تضخيم الارباح

Simplex Method & Problms of Profit Maximization

تختلف أساليب البرامج الخطية وتتعدد ، فمنها الطريقة البيانية حيث تمثل المتباينات بيانيا ويحدد الحل الأمثل باستخدام الرسم البيانى ومنها الطريقة الجبرية (باستخدام رياضة المصفوفات) وتعتبر أساسا لطريقة السمبلكس Simplex وهى الطريقة العامة لحل كافة مشاكل البرامج الخطية ، كما توجد أساليب خاصة تحل مشاكل معينة مثل طريقة النقل Transportation method التى تصمم أساسا لحل مشاكل التوزيع بين المخازن المختلفة والأسواق المختلفة بالطريقة التى تقلل تكاليف النقل إلى الحد الأدنى . وسنستعرض فيما يلى الأساليب المختلفة للبرامج الخطية .

الطريقة البيانية

لاتختلف الطريقة البيانية للبرامج الخطية المستخدمة لحل المتباينات الخطية عن الطريقة البيانية المستعملة لحل المعادلات الآنية من الدرجة الأولى فبينما تمثل المعادلات الخطية بخطوط مستقيمة ويكل حل جميع المعادلات الممثلة عند نقطة تقاطع هذه الخطوط (إن وجد) ، كذلك يمكن تصوير المتباينات الخطية بمساحات محدودة بالخطوط المستقيمة تحتها أو فوقها ويكل حل جميع المتباينات الممثلة فى المساحات المشتركة بين هذه المساحات المختلفة . وبينما

يكون حل المعادلات الآنية (إن وجد) نقطة واحدة فإن حل المتباينات (إن وجد) يتكون من مجموعة من النقط يمثل كل منها حلا ممكنا للمشكلة ولكن يتميز أسلوب البرامج الخطية باختيار أفضل الحلول بين البدائل المختلفة للوصول إلى الحل الأمثل .

مثال ٢/٤ :

ويمكن تجميع الفروض السابقة فى مثال كالاتى .

ينتج أحد المصانع منتجين س ، ص ويمر الإنتاج فى قسمين إنتاجيين ١ ، ٢ وتبلغ الطاقة القصوى لكل من قسمى الإنتاج ٩٠ ، ٤٨ ساعة عمل مباشر على الترتيب فى الأسبوع .

فإذا كانت كل وحدة من المنتج س تحتاج إلى ٦ ساعات فى قسم (١) وساعتين فى قسم (٢) بينما تحتاج كل وحدة من المنتج ص إلى ٣ ساعات فى قسم (١) و ٤ ساعات فى قسم (٢) كانت كل وحدة من المنتج (س) تغل ربح إجمالى قدره ١٠ جنيهات وتغل كل وحـــدة من المنتج ص ٨ جنيهات والمطلوب تحديد عدد الوحـــدات الواجب إنتاجها من كل منتج أسبوعيا بقصد تضخيم الأرباح إلى الحد الأقصى :

ولحل هذا المثال نبدأ بالثلاث خطوات السابق ذكرها وهى :

١ — تحديد الهدف أو دالة الربح لتضخيم ١٠ س + ٨ ص

تمثيل القيود والمحددات كالآتى :

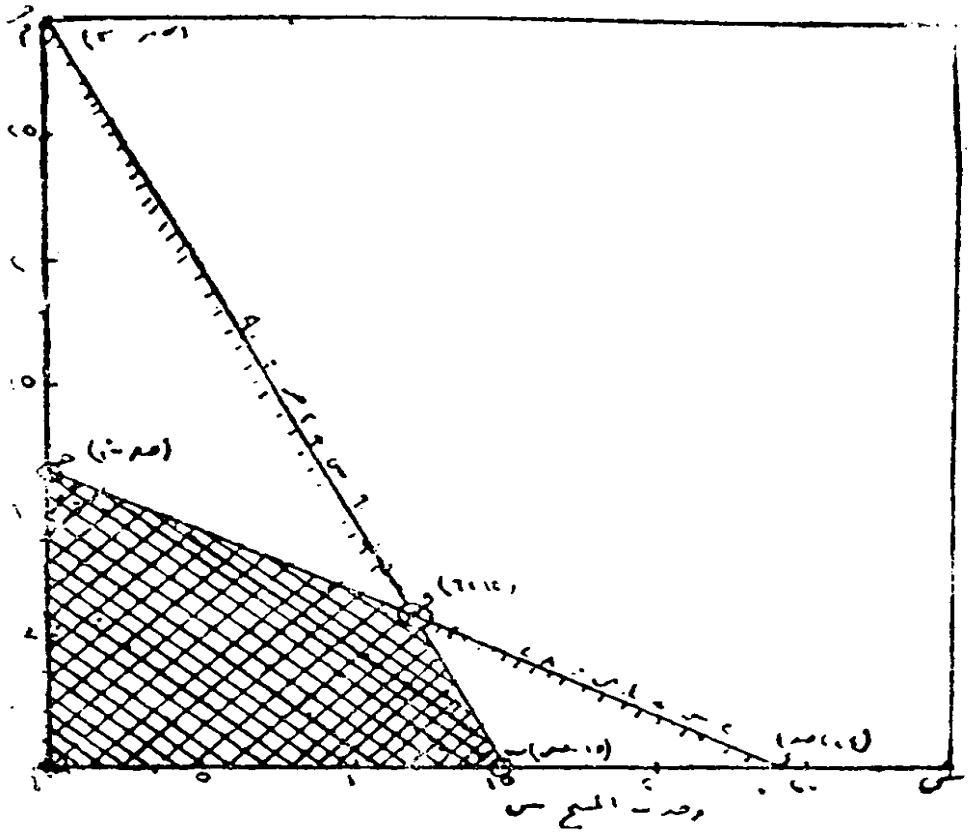
قسم (١) : ٦ س + ٣ ص ≯ ٩٠ ساعة عمل مباشر

قسم (٢) : ٢ س + ٤ ص ≯ ٤٨ ساعة عمل مباشر

٣ — شرط عدم السلبية يمثل كالآتى : س ≥ صفر

ص ≥ صفر

٤ — التمثيل المتباينات بيانيا نكتفى بالربع الشمالى الشرقى (بسبب شرط عدم السلبية) حيث كل من س و ص موجب و نرسم الخطوط الممثلة المعادلات المكونة من نفس بيانات المتباينات لتحديد المساحة الممثلة المتباينات فوق أو تحت الخطوط المذكورة .



شكل ٣/٢ — الطريقة البيانية للبرامج الخطية

وفى الشكل رقم (٢) تمثل متباينة الطاقة المحدودة للقسم (١) المعبر عنها جبريا بالمتباينة س+٣ ص≥ ٩٠ بالمساحة أسفل الخط ا ب المتصل بين نقطتى ا (على محور ص عند نقطة ٣٠ بينما س = صفر) و ب (على محور س عند نقطة ١٥ بينما ص = صفر) وكلا النقطتين فرضا على أساس المعادلة (٦ س + ٣ ص = ٩٠) المقتبسة من المتباينة الخاصة بطاقة القسم (١) والتى تعتبر حداً المساحة الممثلة لها بيانياً فى الشكل (٣/٢)

وكذلك تمثل متباينة الطاقة المحدودة للقسم (٢) المعبر عنها جبريا بالمتباينة ٢ س + ٤ ص ≤ ٤٨ بالمساحة أسفل الخط حـ ء المتصل بين نقطتى حـ (على محور ص عند نقطة ١٢ بينما س = صفر) و ء (على محور س عند نقطة ٢٤ بينما ص = صفر) وكلا النقطتين فرضا على أس المعادلة (٢ س + ٤ ص = ٤٨) المقتبسة من المتباينة الخاصة بطاقة القسم (٢) والتى تعتبر حداً للمساحة الممثلة لها بيانيا فى الشكل .

وبينما يتقاطع الخطان ا ب ، حـ ء فى النقطة هـ فان المساحة المشتركة للمتباينتين تنحصر فى المحدب (Convex) م حـ هـ ب وتمثل المساحة المشتركة مجموعة من الحلول الممكنة المشكلة بمعنى أن أى نقطة فى المساحة المشتركة تمثل حلا ممكنا ، ولكن المطلوب هو الحل الافضل . وبدلا من اختيار جميع البدائل الممكنة فى محدب الحلول فإنه يمكننا أن نكتفى بالنقط الممثلة بأركان المحدب فقط وهى م ، حـ ، هـ ، ب ثم إختيار الحل الذى يحقق لنا الهدف المنشود وهـــو أقصى ربح ممكن ، ويمكن تلخيص الحلول المختلفة فى جدول كالآتى :

لركن	مزيج المنتجين		دالة الهدف أو دالة الربح	مجموع الربح الإجمالى
	(س)	(ص)	(١٠ س + ٨ ص)	
م	صفر	صفر	صفر + صفر	صفر
حـ	صفر	١٢	صفر + ٩٦	٩٦
هـ	١٢	٦	١٢٠ + ٤٨	١٦٨
ب	١٥	صفر	١٥٠ + صفر	١٥٠

ومن الجدول السابق يتبين أن الربح الإجمالى الأمثل أو أقصى ربح ممكن هو ١٦٨ جنيها أى عند النقطة هـ حيث س = ١٢ وص = ٦ ويكون مزيج المنتجين س ، ص عند هذه النقطة هو الحل الأمثل والهدف المنشود للربح هو ١٦٨ جنيها .

حدود استخدام الطريقة البيانية :

تعتبر الطريقة البيانية من أسهل الطرق المستخدمة فى حل مشاكل البرامج الخطية وأبسطها وأكثرها وضوحا . ولكن يؤخذ عليها عدم الدقة فى تحديد قرارات الأركان المختلفة لحدب الحلول الممكنة ، إذ كثيراً مايتعذر على الشخص مراعاة الدقة التامة فى رسم الخطوط الممثلة للمعادلات وكثيراً ماتنحرف هذه الخطوط قليلا عن الموضع الحقيقى الواجب أن تقع فيه .

وبالإضافة إلى ذلك فهناك عيب رئيسى للطريقة البيانية وهى عدم إمكان استخدامها فى حالة زيادة المتغيرات عن متغيرين ويلاحظ أن الطريقة البيانية عموما تعتمد على محورى س ، ص . وفى حالة وجود متغير ثالث قد يمكن تصور مخروط هندسى وتصوير ذلك بيانيا باستخدام نظريات هندسية معينة أما إذا زادت المتغيرات على ذلك فلن يمكن استخدام الطريقة البيانية ويجب اللجوء إلى الجبر واستخدام الطريقة العامة لحل مشاكل البرامج الخطية وتعرف بطريقة السمبلكس Simplex Method .

طريقة السمبلكس

أو الطريقة العامة للبرامج الخطية

تعددت طرق البرامج الخطية ولكن تمتاز طريقة السمبلكس بكونها الطريقة العامة الوحيدة التى يمكن تطبيقها فى كافة مشاكل البرامج باختلاف أنواعها وقد قدم هذه الطريقة جورج ب دانتزج George B. Dantzig عام ١٩٤٧ وتمتاز هذه الطريقه بأنها مبنية على أساس جبرى مما أدى إلى إمكان تطبيقها فى مختلف الحالات . وتتلخص الطريقة العامة للبرامج الخطية فى الخطوات الآتية :

أولا — ترتيب خطوات المشكلة وتمثيل دالة الهدف المنشود ومعاينات القيود المحددة وشرط عدم السلبية .

ثانياً — تكملة أول حل ممكن Initial Feasible Solution ويمكن تكملة أول حل ممكن بطريقة بدائيه .

ثالثاً — اختبار مثاليه الحل البدائى الأول optimality test لمعرفة عما إذا كان هذا الحل هو الحل الأمثل أم لا . وتكون نتيجة الاختبار أحد أمرين :

(ا) التأكد من أن الحل المذكور هو الحل المثالى وبالتالى يكون هو الحل الذى يحقق الهدف المنشود .

(ب) التحقيق من أن الحل المذكور ليس هو الحل المثالى وبالتالى يجب البحث عن حل آخر بعد تحسين الحل المذكور .

رابعاً — يكرر اختبار مثالية الحل الاخير كما هو مذكور فى ثالثاً حتى

متأكد من مثالية الحل الأخير وهكذا تتكرر الخطوات حتى نصل إلى حل المشكلة الذى يحقق لنا الهدف المنشود .

ولشرح طريقة السمبلكس نعيد حل المثال السابق حله بالطريقة البيانية باستخدام الطريقة العامة (السمبلكس) .

أولا : ترتيب خطوات المشكلة :

١ — الهدف المنشور ع (ص) = ١٠ س١ + ٨س٢ (١)

٢ — القيود الثابتة والعوامل المحددة :

بالنسبة للطاقة القصوى فى القسم الإنتاجى (١) : ٦ س١ + ٣س٢ < ٩٠

بالنسبة للطاقة القصوى فى القسم الإنتاجى (٢) : ٢ س١ + ٤س٢ ≤ ٤٨

٣ — شروط عدم السلبية س١ ≤ صفر

س٢ < صفر

ثانياً : تكملة أول حل ممكن :

١ — تحويل المتباينات إلى معادلات .

تعتمد طريقة السمبلكس اعتماداً كلياً على الطريقة الجبرية ولذلك فإن تحويل المتباينات إلى معادلات يسهل عملية التحليل الجبرى للمعادلات. ويمكن تحويل المتباينات إلى معادلات بإضافة مكملات تدعى متغيرات راكدة Slack Variables. والتغيرات الراكده قد تكون موجبة (لتكملة المتباينات ذات العلامة أقل من (<) أو سالبة (لتكملة المتباينات ذات العلامة أكثر

(١) ملاحظة غيرت رموز المتغيرات المتعلقة بالمنتجين س ، ص إلى س ١ ، س ٢ وذلك لأن الحل بطريقة السمبلكس سيدعونا إلى إضافة متغيرات أخرى وبذلك تستطيع أن نرمز بالرموز س٣ ، س٤ ... إلخ .

من (>) . وبما أن المتغيرات الراكدة التى ستضاف إلى كل من المتباينات المختلفة تختلف عن بعضها فيجب أن يرمز لها برموز مختلفة ولتكن س٣ ، س٤ وهكذا ، وبذلك سنحصل على المعادلات الاتية :

بالنسبة للقسم الإنتاجى (١): ٦ س١ + ٣ س٢ > ٩٠

أى أن ٦س١ + ٣ س٢ + س٣ = ٩٠

حيث تمثل س٣ عدد الساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى (١) : وقد تساوى صفراً إذا ما استغلت طاقة القسم الإنتاجى (١) بالكامل .

بالنسبة للقسم الإنتاجى (٢) : ٢س١ + ٤ س٢ ≤ ٤٨

أى أن : ٢س١ + ٤س٢ + س٤ = ٤٨

حيث تمثل س١ عدد الساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى (٢) . وقد تساوى صفراً إدا ما استغلت طاقة القسم الإنتاجى (٢) بالكامل .

ويتضح مما سبق أن هذه المكملات س٣ ، س٤ لن تؤثر على الحل بأى شىء لأنها تمثل طاقة عاطلة ولذلك تدعى بالمتغيرات الراكدة كما أنها لن تؤثر على الربح أو أى عنصر من عناصر المشكلة . ولكنها فى نفس الوقت حولت المتباينات إلى معادلات خطية يمكن أن تحل بالطرق الجبرية العادية .

ويلاحظ فى المعادلات الجديدة أنها تشمل ٤ متغيرات مجهولة وكان يمكن أن تحل بطريقة المعادلات الآنية لو كان لدينا عدد من المعادلات بقدر المتغيرات المجهولة أى ٤ ولكن لدينا فقط معادلتين مما يصعب وجود حل واحد لجميع هذه المتغيرات . ولكن يمكن إيجاد عدد من الحلول المختلفة إذا افترضنا فروض مختلفة يمكن للادارة فرضها ، وتعتبر كافة الحلول المستنتجة بناء على الفروض المحتملة بحلول ممكنة إذا رأت الإدارة تنفيذها . وتنحصر مهمة أسلوب

البرامج الخطيه فى إيجاد أفضل حل ممكن من هذه الحلول .

٢ — أول حل بدائى ممكن :

وتبدأ طريقة السمبلكس بفرض أسهل الحلول للمكنة وأضعفها فى نفس الوقت على أن تعدل هذا الفرض فى الخطوات التالية . فإذا فرضنا أن الإدارة قررت عدم إنتاج أى شىء من المنتجين أى أن كلا من س١ ، س٢ يساوى صفر .

من معادلة القسم الإنتاجى (١) ٦ س١ + ٣ س٢ + س٣ = ٩٠

∴ س٣ = ٩٠

ومن معادلة القسم الإنتاجى (٢) ٢ س١ + ٤ س٢ + س٤ = ٤٨

∴ س٤ = ٤٨

ويكون الهدف المنشود وهو الربح :

ع (ر) = ١٠ س١ + ٨ س٢ = صفر

وواضح أن هذا الحل ممكن ولكنه أضعف الحلول حيث أنه لن يتحقق أى ربح إجمالى بل يترتب عليه خسائر محققة للمشروع . ولذلك يجب أن تختبر فعالية هذا الحل كى نبحث عن وسائل أخرى لتحسينه إلى أن نصل بعد عدة خطوات إلى الحل الأمثل .

ولترتيب خطوات العمل ومتابعة اختيار مثاليته ترتب البيانات فى شكل مصفوفة ويمكن إعدادها فى شكل جدول كالآتى :

ربح الوحدة (ر)	ك ر المتجه الأساسى	١٠ س١	٨ س٢	صفر س٣	صفر س٤	صفر س.	(١٨) مجموع (للمراجعة)
صفر	س٣	٦	٣	١	صفر	٩٠	١٠٠
صفر	س٤	٢	٤	صفر	١	٤٨	٥٥
اختيار المثالية							
ا ر		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ر — ك ر		— ١٠	— ٨	صفر	صفر	صفر	صفر (— ١٨)

ويمكن تفسير الجدول السابق كالآتى :

١ — يمثل العمود الأول فى الجدول (ر) الربح المحقق لكل متغير من العوامل المذكورة فى العمود الثانى (تحت عنوان المتجه الأساسى) . أى أنه فى هذا الجدول الربح الناتج عن وحدة المتغير س٣ صفراً حيث أن س٣ متغير راكد يمثل وقت ضائع بالقسم الإنتاجى (١). وكذلك الربح الناتج عن وحدة المتغير س٤ صفراً لأن س٤ متغير راكد يمثل الوقت الضائع بالقسم الإنتاجى (٢) .

٢ — تمثل الأعمدة التالية بعد ذلك معاملات المتغيرات المختلفة طبقاً للحل المقترح تنفيذه . وتنقسم هذه المتغيرات إلى :

(ا) متغيرات أساسية فى الحل (س١ ، س٢) التى تمثل عدد الوحدات المنتجة من كل منتج .

(ب) متغيرات راكدة أو مكملات (س٣ ، س٤) المستخدمة فى تحويل المتباينات إلى معادلات . وتمثل — فى هذا المثال — وقت وطاقة ضائعة فى كل من الأقسام الإنتاجية .

(حـ) القيمة الرقمية للمعادلات (س.) .

٣ — يمثل الصف الأول صف معادلة الربح المستهدف أو الدالة الهدف المنشود أى ء(ر) هو المطلوب تضخيمه فى هذا المثال .

٤ — يمثل الصف الثانى العوامل المتغيرة وتشمل س١ ، س٢ وتعرف بالمتغيرات الأساسية ، أما س٣ ، س٤ وتعرف بالمتغيرات الراكدة أو المكملة. أما س. فتمثل القيمة الرقمية فى المعادلة .

٥ — تمثل الصفوف التالية (الثالث والرابع) المعادلات المقتبسة من المتباينات المتعلقة بالقيود المحددة لحلول المشكلة وعليها سيتم تشكيل العمليات.

٦ — يمثل الصفان الأخيران اختبار المثالية : حيث يمثل صف ا ر قيمة الأرباح المحققة طبقاً للحل المقترح فى كل عمود ويمثل صف (ا ر — ء ر) الفرق بين هذا الربح المحقق والربح المنشود.

وتحسب ا ر بضرب العناصر الموجودة فى كل عمود — بعد تحويرها فى شكل مصفوفة ـ فى المتجه العمودى الممثل للربح لوحدة (عمود ر) وفى هذا المثال يراعى أن عمود ر مكون من أصفار فإذا ضرب فى أى عمود ستكون النتيجة أصفاراً . وبذلك ستكون نتيجة (ا ر — ء ر) هى نفس قيمة ء ر بعد تغيير العلامة .

ولشرح مفردات هذا الجدول نوجزها فيما يلى :

صف س٣ : يمثل الرقم ٩٠ عدد الساعات العاطلة فى القسم الأول وهو الممثل بالمتغير س٣ ويلاحظ وجود (١) عند تقاطع الصف ص٣ مع العمود س٣ التى تمثل الساعات العاطلة فى القسم الأول . وحيث أننا فرضنا أن كلا من س١ ، س٢ تساوى صفراً فى الحل البدائى

الأول ولا يرجد علاقة للمتغير س٤ فى القسم الإنتاجى الأول (حيث أن س٤ يمثل عدد الساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى الثانى) فان جميع ساعات القسم الإنتاجى الأول تعتبر ساعات عاطلة . أما الرقم (٦) فى عمود س١ والرقم (٣) فى عمود س٢ فهى تمثل عدد الوحدات من س٣ (عدد الساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى الأول) التى تنقص إذا مادخلت وحدة واحدة من س١ ، س٢ فى الانتاج على الترتيب .

ومن المثال نعلم أن كل وحدة من المنتج س١ تحتاج إلى ٦ ساعات عمل مباشر فى القسم الإنتاجى الأول ولذلك فإذا أضيفت وحدة من المنتج س١ فى الجدول ستنقص عدد الساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى الأول (س٣) بمقدار ٦ ساعات . وكذلك إذا أدخلت وحدة من المنتج س٢ فى الجدول ستنقص عدد الساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى الأول (س٣) بمقدار ٣ ساعات .

أما الرقم صفر فى عمود س٤ فانه يعنى أنه لو أضيفت وحدة من س٤ وهى عدد ساعات العمل العاطلة فى القسم الإنتاجى الثانى لن تؤثر هذه على عدد ساعات العمل فى القسم الإنتاجى الأول ولذلك سيكون التغير فى س٣ صفراً .

صف س٤ : يمثل الرقم ٤٨ عدد الساعات العاطلة فى القسم الثانى وهو بالمتغير س٤ . ويلاحظ وجود الرقم (١) عند تقاطع الصف س٤ مع العمود س٤ التى تمثل الساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى الثانى.

وحيث أننا فرضنا أن كلا من س١ ، س٢ تساوى صفراً فى الحل البدائى الاول ولا يوجد علاقة للمتغير س٣ فى القسم الإنتاجى الثانى (حيث أن س٣ تمثل عدد الساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى الاول) فان جميع ساعات القسم الإنتاجى الثانى تعتبر ساعات عاطلة .

أما الرقم (٢) فى عمود س١ والرقم (٤) فى عمود س٢ فهى تمثل عدد الوحدات عن س٤ (عدد الساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى الثانى) التى تنقص إذ مادخلت وحدة واحدة من س١ أو س٢ فى الإنتاج على الترتيب ومن المثال نعلم أن كل وحدة من المنتج س١ تحتاج إلى ساعتين عمل فى القسم الإنتاجى الثانى ولذلك فإذا أضيفت وحدة من المنتج س١ فى الجدول ستنقص عدد الساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى الثانى (س٤) بساعتين وكذلك إذا أدخلت وحدة من المنتج س٢ فى الجدول ستنقص عدد الساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى الثانى (س٤) بمقدار ٤ ساعات

أما الرقم صفر فى عمود س٣ فإنه يعنى أنه لو أضيفت وحدة من س٣ وهى عدد الساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى الاول لما كان هناك أى تغيير يذكر على عدد ساعات العاطلة فى القسم الإنتاجى الثانى ولذلك يعتبر التغيير صفراً .

عمود ا٣ : جميع مفردات هذا العمود صفراً وذلك لانه فى الحل البدائى فرضنا عدم إنتاج أى وحدة من س١ أو س٢ وهى المتغيرات التى تمثل منتجات معينة وتغل أرباحا محددة ، واقتصرت المعادلات

على قيم س٣ ، س٤ التى تمثل عدد الساعات العاطلة فى قسمى الإنتاج (١) ، (٢) على الترتيب والتى لا تغل أى ربح للمشروع . ولذلك كانت قيمة الارباح المحققة فى كل حالة صفراً .

(صف ا ر ـ و ر) : ولاختبار مثالية الحل تقارن بين الارباح التى يمكن تحقيقها من واقع معادلة الارباح المطلوب تضخيمها .

فى عمود س١ لم تغل أى أرباح رغم أنه لو اضيفت وحدة فى الإنتاج لكان الربح المتوقع ١٠ جنيهات (تفسير الرقم ـ ١٠). وكذلك بالنسبة لعمود س٢ لو اضيفت وحدة فى الإنتاج لكان الربح المتوقع ٨ جنيهات (تفسير الرقم ـ ٨) . ولذلك فانه يحسن أن نضيف هذه المنتجات فى الحل الجديد . ولكن بما أن وحدة المنتج س١ تغل أكثر من س٢ ولذلك نفضل إدخال أكبر كمية ممكنة من المنتج س١ فقط فى الجدول الجديد .

أما إذا كانت قيم مفردات هذا الصف موجبة كان ذلك مبيناً بأن الأرباح المستغلة إما مساوية أو أكبر من الأرباح المتوقعة لو أضفنا وحدة واحدة من أى منتج . وفى هذه الحالة سيكون ذلك الحل مقبولا ويحكم عليه بالحل الأمثل للمشكلة .

٧ — العمود الأخير (مجموع المراجعة) ويسمى كذلك لأنه يستخدم كميزان لمراجعة العمليات الحسابية للمعاملات الموجودة فى كل صنف حيث يمكن حساب المعاملات الموجودة فى هذا العمود بطريقتين ويجب أن يكون الناتج واحداً فى الطريقتين وهما :

(ا) يجمع جموع المعاملات الموجودة فى الصف الذى به المجموع .

(ب) باجراء كافة العمليات التى تجرى على المعاملات المختلفة لإيجاد القيم الجديدة لمعاملات الصف المذكور عن المجموع القديم لذلك الصف أسوة بغيره من المعاملات المختلفة فى الاعمدة المختلفة .

ولتمثيل ذلك ننظر إلى معامل هذا العمود (مجموع المراجعة) فى صف ا ر ويساوى صفر . ويمكن حسابه بإحدى الطريقتين الآتيتين :

(ا) بجمع جميع معاملات صف ا ر ويساوى حاصل الجمع صفر .

(ب) بضرب عمود (ر) بعد تحويره إل مصفوفة فى عمود المجموع فيكون الناتج صفر أيضا .

ويمكن كذلك تطبيقه فى مجموع المراجعة فى صف (ا ر ـ ٤ ر) كالآتى :

(ا) حاصل جميع معاملات الصف المذكور هى (— ١٠ ، ٦ — ٨) أى ـ ١٨ .

(ب) باقى طرح المجموع فى صف ٤ (ر) ويساوى ١٨ من المجموع فى صف ا ر ويساوى صفر ، تكون النتيجة ـ ١٨ .

ولذلك يعتبر هذا المجموع للمراجعة حيث أنه لا يمثل أى قيمة معينة ولكنه يستكمل لعملية المراجعة فقط .

ثالثا . تحسين الحل وإيجاد حل أفضل من الحـــــل الحالى .

إذا ما ظهر لنا مقادير سالبة فى اختبار المثالية فى صف (ا ر — ٤ ر) كان ذلك يعنى بأن الأرباح يمكن أن تزيد إذا ما أدخلت متغيرات هذه المعاملات فى الحل الجديد . ومن الجدول السابق تبين لنا أنه يمكن إضافة

١٠ ج للارباح عن وحدة تضاف للانتاج من المنتج س١ وكذلك ٨ ج عن كل وحدة من المنتج س٢ .

ولما كان هدفنا تضخيم الربح فإننا نفضل إدخال المنتج س١ فقط حيث تغل كل وحدة منه دخلا أكبر من المنتج س٢ . ولذلك تسمى العمود الذى به أكبر مقدار سالب فى صف (ا ر — ء ر) بالعمود الرئيسى الذى سيعتبر أساس الإنتقال من الجدول الأول إلى الجدول الثانى . ومعنى دخول المنتج س٢ فى الحل الجديد وجب أن نستغنى عن أحد المتغيرات الموجودة حاليا فى الجدول الحالى ليحل محله المتغير س١ . ولذلك يجب دراسة كل صف على حدة لمعرفة أى المتغيرات التى سيحل محلها المتغير س١ . وإذا نظرنا إلى صف س٣ حيث لدينا ٩٠ ساعة عمل فى القسم الإنتاجى الأول يمكن أن تسمح لنا بانتاج ١٥ وحدة من المنتج س١ حيث أن كل وحدة من المنتج س١ تحتاج إلى ٦ ساعات عمل مباشر فى القسم الإنتاجى الأول .

أما إذا نظرنا إلى صف س٤ حيث لدينا ٤٨ ساعة عمل فى القسم الإنتاجى الثانى يمكن أن تسمح لنا بانتاج ٢٤ وحدة من المنتج س٢ حيث أن كل وحدة من المنتج س٢ تحتاج إلى ساعتين عمل فى القسم الإنتاجى الثانى .

ويلاحظ أننا مقيدون بعدد ساعات العمل فى القسمين معا فاذا انتجنا ٢٤ وحدة من المنتج س١ فى القسم الإنتاجى الثانى لن نتمكن من إنتاجهم فى القسم الإنتاجى الأول لأن أقصى كمية يمكن إنتاجها فى القسم الإنتاجى الأول ١٥ وحدة فقط . ولذلك تضطر عند إدخال س٢ فى الإنتاج أن نكتفى بأصغر كمية يمكن إنتاجها بالمقارنة بين الأقسام الإنتاجية المختلفة والممثلة فى صفوف المعادلات المختلفة ولذلك فى الحل الجديد سيحل المتغير

س٣ بينما يبقى المتغير س٤ فى الحل الجديد ، ويسمى صف س٤ بالصف الرئيسى

ويمكن تلخيص ماسبق فى خطوات محددة لتسيل إجراءات الحل كالاتى .

١ — يختار العمود الذى به أكبر مقدار سالب فى صف (ا ر — ء ر) كما ذكرنا من قبل . ويسمى هذا العمود « العمود الرئيسى » Key Column وفى الجدول السابق يعتبر عمود س١ العمود الرئيسى لاحتوائه على أكبر مقدار سالب وهو (— ١٠) .

٢ — يبحث عن « الصف الرئيسى » Key Row الذى يجب أن يحل المتغير س١ محل المتغير المثل فى هذا الصف . ويختار هذا الصف بعد قسمة معاملات س . (القيمة الرقمية المعادلات) على معاملات العمود الرئيسى أى بقسمة كل رقم موجود فى عمود س . على الرقم المقابل له فى العمود الرئيسى ويوجد عند تقاطع العمود الرئيسى مع ذلك الصف .

ويرمز لخارج القسمة بالرمز اللاتينى § (ثيتا) وبتطبيق ذلك فى الجدول السابق نحسب .

§ (فى صف س٣) = ٩٠ ÷ ٦ = ١٥ (أصغر قيمة موجبة)

§ (فى صف س٤) = ٤٨ ÷ ٢ = ٢٤

وبذلك يعتبر صف س٣ هو الصف الرئيسى وبناء على ذلك يمكن تحسين الحل بادخال المتغير س١ بدلا من المتغير س٣ حيث أن عمود س١ هو العمود الرئيسى والصف س٣ هو الصف الرئيسى والرقم الموجود عند تقاطع العمود الرئيسى (س١) بالصف الرئيسى (س٣) يسمى بالمفتاح Key وهو ممثل فى الجدول السابق بالرقم (٦) .

٣ — يكمل الجدول الثانى كالاتى .

(ا) يبدأ بالصف الرئيسى الذى يخضع للعمليات الأتية :

اقسم جميع عناصر الصف الرئيسى على المفتاح (٦) حتى يكون رقم المفتاح بعد تعديله واحد صحيح . ويكون الصف الجديد كالاتى .

(س١ ١ ½ ½ صفر ١٥ ١٠٠/٦) .

(ب) ينقل س١ إلى عمود المتجه الأساسى ليحل محل س٣ ويستبدل معامل ربح س١ وهو (١٠) محل معامل ربح س٣ وهو صفر (صفر) فى عمود (ر) .

(حـ) تتم عمليات الصفوف (التى سبق دراستها فى رياضة المصفوفات) للصفوف الأخرى بطريقة تجعل سائر عناصر العمود الرئيسى تتحول إلى أصفار ففى صف س٤ نطرح منه عناصر الصف الرئيسى الجديد بعد ضربه فى ٢ (الرقم ٢ هو تقاطع صف س٤ القديم مع العمود الرئيسى س١) حتى نحصل على صفر عند تقاطع صف س١ وعمود س . ويتم الناتج كالاتى .

عناصر س٢ القديم ٢ ٤ صفر ١ ٤٨ ٥٥

— (عناصر س٢ الجديد × ٢) ٢ ١ ½ صفر ٣٠ ١٠٠/٣

باقى الطرح (أو عناصر س١ الجديد) صفر ٣ −١ ١/٣ ١٨ ٦٥/٣

ويمكن تطبيق القانون الآتى لإيجاد القيمة الجديدة لكل عنصر

القيمة الجديدة للعنصر =

القيمة القديمة − (الرقم المقابل فى الصف الرئيسى × الرقم المقابل فى العمود الرئيسى) / المفتاح

وإذا طبقنا القانون على عناصر صف س، القديم سنحصل على القيم الجديدة كالاتى :

القيمه القديمة − (الرقم المقابل فى الصف الرئيسى (س ٣) × العمود الرئيسى (س١)) / المفتاح + الرقم المقابل فى

٣ — $\frac{٢ \times ٦}{٦}$ = ٢ — ٢ = صفر

٤ — $\frac{٢ \times ٣}{٦}$ = ٤ — ١ = ٣

صفر — $\frac{٢ \times ١}{٦}$ = صفر — $\frac{١}{٣}$ = — $\frac{١}{٣}$

١ — $\frac{٢ \times \text{صفر}}{٦}$ = ١ — صفر = ١

٤٨ — $\frac{٢ \times ٩٠}{٦}$ = ٤٨ — ٣٠ = ١٨

٥٥ — $\frac{٢ \times ١٠٠}{٦}$ = ٥٥ — $\frac{١٠٠}{٣}$ = $\frac{٦٥}{٣}$

٣ — يكمل الجدول الثانى من التعديلات السابقة ثم نعيد حساب ا ر ، (ا ر — ء ر) لإختبار مثالية الحل الجديد ، كما يلى :

(ر)	د ر	١٠	٨	صفر	صفر	صفر	(١٨)
	الخط الأساسى	س١	س٢	س٣	س٤	س.	مجموع المراجعة
١٠	س١	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٦}$	صفر	١٥	$\frac{١٠٠}{٦}$
صفر	س٤	صفر	٣	$\frac{١}{٣}$	١	١٨	$\frac{٦٥}{٣}$
اختبار المثالية							
(ا ر)		١٠	٥	$\frac{٥}{٣}$	صفر	١٥٠	$\frac{٥٠٠}{٣}$
(ا ر — د ر)		صفر	— ٣	$\frac{٥}{٣}$	صفر	١٥٠	$\frac{٤٤٦}{٣}$

(١) ملاحظات : حسبت قيم ا ر بضرب كل عمود فى عمود ر كالآتى

عمود س١ (١ ، صفر) $\begin{pmatrix} ١٠ \\ \text{صفر} \end{pmatrix}$ = ١ × ١٠ + صفر × صفر = ١٠

عمود س٢ ($\frac{١}{٢}$ ، ٣) $\begin{pmatrix} ١٠ \\ \text{صفر} \end{pmatrix}$ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ + ٣ × صفر = ٥

عمود س٣ ($\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٣}$) $\begin{pmatrix} ١٠ \\ \text{صفر} \end{pmatrix}$ = $\frac{١}{٦}$ × ١٠ − $\frac{١}{٢}$ × صفر = $\frac{٥}{٣}$

عمود س٤ (صفر ، ١٠) $\begin{bmatrix} ١٠ \\ \text{صفر} \end{bmatrix}$ = صفر + ١٠ × ١ + صفر × صفر = صفر

عمود س. (١٥ ، ٨) $\begin{bmatrix} ١٠ \\ \text{صفر} \end{bmatrix}$ = ١٥ × ١٠ + ٨ × صفر = ١٥٠

عمود المراجعة ($\frac{١٠٠}{٦}$ $\frac{٦٥}{٣}$) $\begin{bmatrix} ١٠ \\ \text{صفر} \end{bmatrix}$ = $\frac{١٠٠}{٦}$ × ١٠ + $\frac{٦٥}{٣}$ × صفر = $\frac{٥٠٠}{٣}$

[٢] يراجع عناصر عمود مجموع المراجعة كالآتى :

صف س١ : حاصل جمع [١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٦}$ + صفر + ١٥ = $\frac{١٠٠}{٦}$]

صف س٤ : حاصل جمع [صفر + ٣ − $\frac{١}{٢}$ + ١ + ١٨ = $\frac{٦٥}{٣}$]

صف ا ر : حاصل جمع [١٠ + ٥ + ٤/٣ + صفر + ١٥٠ = ٥٠٠/٣]

صف ا ر — ٥ ر : حاصل جمع [صفر — ٣ + ٤/٣ + صفر + ١٥٠]

= ٤٤٦/٣

أى أن جميع العمليات الحسابية بالجدول صحيحة .

وقبل أن ننتقل من هذا الجدول إلى الجدول التالى نكرر شرح مفردات جدون السمبلكس حتى يسهل تفهم المعنى وأسباب الخطوات التى نتبعها فى الحل .

صف س١ : يمثل الرقم ١٥ [فى عمود س.] أكبر عدد وحدات يمكن إنتاجه من س١ حيث تحدد ذلك الطاقة الإنتاجية للقسم الإنتاجى الأول والمحدد بمقدار ٩٠ ساعة . ويلاحظ وجود (١) عند تقاطع صف س١ مع عمود س١ بمعنى أن س١ = ١٥ .

أما الرقم (١/٢) فى عمود س٢ يعنى بأنه لو أضفنا وحدة من المنتج س٢ فى الحل وجب أن ينقص عدد الوحـــدات المنتجة من س١ بمقدار ٤/٣ وحدة حيث أن وحدة المنتج س٢ تحتاج إلى ٣ ساعات عمل مباشر فى القسم الإنتاجى الأول أى تعادل الوقت اللازم لإنتاج نصف وحدة من المنتج س٢ التى تحتاج إلى ٦ ساعات عمل فى القسم الانتاجى الأول .

أما الرقم ١/٢ فى عمود س٢ يعنى بأنه لو أضفنا ساعة عمل عاطلة فى القسم الإنتاجى الأول أى نقصت ساعات العمل فى القسم الأول ساعة واحدة لأدى ذلك إلى نقص إنتاج س١ بمعدل ١/٢ وحدة حيث أن الوحدة من س١ تحتاج إلى ٦ ساعات عمل فى القسم الأول .

أما الرقم صفر فى عمود س٤ يعنى بأنه لو نقصت ساعات العمل فى القسم الإنتاجى الثانى ان يؤثر ذلك على إنتاج س١ وخصوصا أنه هناك عدد من ساعات العمل العاطلة فى القسم الإنتاجى الثانى لن نحتاج إليها لإكتفائنا بانتاج ١٥ وحدة من س١ نقيجة حدود الطاقة فى القسم الإنتاجى الأول .

صف س٤ : يمثل الرقم ١٨ فى العمود س. عدد ساعات العمل العاطلة فى القسم الإنتاجى الثانى ويلاحظ وجود (١) عند تقاطع صف س٤ مع عمود س٤ بمعنى أن س٤ = ١٨. وتفسير هذا الرقم هو أننا فى هذا الجدول إقترحنا إنتاج ١٥ وحدة من المنتج س١ وهذه الوحدات تحتاج إلى ٣٠ ساعة عمل مباشر فى القسم الإنتاجى الثانى (١٥ وحدة × ٢ ساعة لكل وحدة) . ولما كانت عدد ساعات العمل فى القسم الإنتاجى الثانى ٤٨ ساعة ، فان عدد ساعات العمل العاطلة (س٤) ستكون ١٨ ساعة (٤٨ — ٣٠ ساعة) .

أما الرقم (صفر) فى عمود س١ فانه يعنى أنه لن يكون هناك أى تأثير لعدد وحدات س١ على س٤ وذلك لأنه لن نتمكن من زيادة عدد وحدات س١ نظرا لإستغلالنا لكل طاقة القسم الإنتاجى الأول .

أما الرقم (٣) فى عمود س٢ فانه يعنى بأنه لو أضيفنا وحدة من س٢ فى الحل لأدى ذلك إلى نقص نصف وحدة من المنتج س١ (كما جاء من قبل) ويكون أثر ذلك على عدد ساعات العمل العاطلة فى القسم الإنتاج الثانى (س٤) كما يأتى: إنتاج وحدة من المنتج س٢ تحتاج إلى ٤ ساعات عمل فى القسم الإنتاجى الثانى بينما عدم

إنتاج نصف وحدة من المنتج س١ توفر ساعة واحدة عمل فى القسم الانتاجى الثانى (حيث أن وحدة س١ تحتاج إلى ساعتين عمل فى القسم الانتاجى الثانى) . وعلى ذلك يكون أثر إضافة وحدة من المنتج س٢ هو نقص عدد ساعات العمل العاطلة فى القسم الانتاجى (س٤) بمقدار ٣ ساعات (٤ — ١) .

أمام الرقم (— ½) فى عمود س٣ فانه يعنى بأننا لو أضفنا ساعة عمل عاطلة فى القسم الانتاجى الأول (س٣) أى ننقص عدد ساعات العمل فى القسم الإنتاجى الأول وتبع ذلك نقص عدد الوحدات المنتجة من س١ بمقدار ½ وحدة كما جاء من قبل وتوفير الوقت اللازم لذلك فى القسم الانتاجى الثانى أى ½ ساعة (½ وحدة × ٢ ساعة للوحدة) وبذلك تزيد عدد الساعات العاطلة فى القسم الانتاجى الثانى س٤ بمقدار ½ ساعة .

وتتوقف العلامة أمام المعاملات المختلفة على العلاقة بين المتغيرات وطريقة تغير كل منها . فالعلامة السالبة تبين تغير طردى للمتغيرين أى زيادة فى المتغير الأول نتيجة زيادة فى المتغير الآخر وبالعكس، أما العلامة الموجبة تبين تغير عكسى للمتغيرين أى زيادة فى المتغير الأول نتيجة نقص فى المتغير الثانى وبالعكس .

ومثال ذلك إذا نظرنا إلى عمود س٣ حيث (½) فى صف س١ و (— ½) فى صف س٤ نلاحظ أن :

(ا) كان نتيجة زيادة وحدة من س٣ نقص عدد الوحدات المنتجة من س١ بمقدار ½ (تغير عكسى والعلامة موجبة) .

(ب) كان نتيجة زيادة وحدة من س٣ زياده عدد الوحدات من س٤ بمقدار ½ (تغير طردى والعلامة سالبة) .

صف ا ر : يمثل الرقم ١٥٠ ج (فى عمود س.) إجمالى الربح المتوقع طبقاً لذلك الجدول المقترح وهى عبارة عن الربح المحقق من إنتاج وبيع ١٥ وحدة من المنتج س١ مضروبا فى ما تغله الوحـــدة الواحدة (١٠ جنيهات) .

ويمثل الرقم ١٠ (فى عمود س١) الربح المحقق من وحدة المنتج س١ .

ويمثل الرقم ٥ (فى عمود س٢) ربح نصف وحدة من س١ التى يمكن أن تستبدل بوحدة من س٢ كما هو مبين فى صف س١ مع تقاطعه مع س٢ . كما سبق أن أوضحنا بأنه بإضافة وحدة من س٢ سينقص إنتاج س١ بمعدل نصف وحدة .

ويمثل الرقم ⅔ (فى عمود س٣) ربح ½ وحدة من س١ التى يمكن أن تستبدل بوحدة من س٣ كما هو مبين فى صف س١ مع تقاطعه مع س٣ .

ويمثل الرقم صفر (فى عمود س٤) عدم وجود أى أثر للمتغير س٤ على الربح فى هذا الجدول المقترح .

صف (ا ر — د ر) : لاختبار المثالية تقارن الأرباح التى يمكن تضحيتها نتيجة إضافة المتغيرات المختلفة فى الإنتاج مع الأرباح المتوقعة منها كالآتى :

يمثل الرقم ١٥٠ ج (فى عمود س.) قيمة الأرباح المتوقعة ولم تقارن

بأى شىء ولذلك لا نستطيع معرفة عما إذا كانت الرقم الأمثل للأرباح أم لا إلا إذا راجعنا متغيرات الصف المختلفة .

ويمثل الرقم صفر (فى عمود س١) عدم وجود أى تغيير فى الربح نتيجة لاستغلالنا المنتج س١ فى الحل المقترح .

ويمثل الرقم — ٣ (فى عمود س٢) نقص فى أرباح هذا الحل عن الأرباح الممكن تحقيقها فى حالة إضافة وحدة من المنتج س٢ وتحقيق ٨ ج ربح بدلا من مبلغ ٥ ج الربح المحققة نتيجة إنتاج نصف وحدة من المنتج س٢ . ومعنى ذلك أنه يمكن زيادة أرباحنا إذا ما أضفنا وحدة من المنتج س٢ بدلا من نصف وحدة من المنتج س٢ .

ويمثل الرقم $\frac{3}{4}$ (فى عمود س٣) تكلفة وحدة من س٣ على الأرباح ولذلك لا يفضل أى تغيير على الجدول الحالى فيما يتعلق بالمتغير س٣ إلا إذا اضطر الحل نتيجة إدخال س٢ كما جاء من قبل .

ويمثل الرقم صفر (فى عمود س٤) عدم وجود أى أثر للمتغير س٤ على موقف الربح فى الجدول الحالى .

ونتيجة لاختيار المثالية فى صف (ا ر — ح ر) تبين لنا أنه يمكن زيادة الربح إذا ما أدخلنا المنتج س٢ فى الحل بدلا من س٢ ولذلك اعتبرنا عمود س٢ هو العمود الرئيسى فى الحل .

وبقى أن نحسب عدد الوحدات التى يمكن أن ندخلها فى الإنتاج فى الحل الجديد ويهمنا طبعاً إدخال أكبر عدد ممكن فى حدود الإمكانيات .

فإذا درسنا صف س١ حيث ينتج ١٥ وحدة ويمكن استبدالهم بمقدار

٣٠ وحدة من س٢ حيث أن كل وحدة من س٢ يمكن استبدالها بنصف وحدة من س١ كما هو مبين بالجدول .

وإذا درسنا صف س٤ يمكن إستبدال ١٨ ساعة عاطلة فى القسم الإنتاجى الثانى (س٤) بمقدار ٦ وحدات من س٢ حيث أن كل وحدة مضافة من س٢ بدلا من نصف وحدة من س١ تستخدم ٣ ساعات إضافيه من س٤ .

ونظراً لاختناق الطاقة فى القسم الإنتاجى نكتفى باضافة مقدار ٦ وحدات فقط من المنتج س٢ وهى أصغر قيمة موجبة . وبذلك يكون صف س٤ هو الصف الرئيسى فى الحل .

رابعاً : إيجاد حل آخر أفضل من السابق :

من اختبار المثالية فى الجدول السابق نجد أنه يمكن تحسين الموقف إذا ماأدخلنا س٢ (العمود الرئيسى) ذات أكبر مقدار سالب فى صف (ا ر - ء ر) أى (— ٣) محل أحد عناصر المتجه الأساسى (س١ أو س٤) واذا نكرر نفس الخطوات التى اتبعناها بعد عمل الجدول الأول كالآتى :

١ — عمود س٢ هو العمود الرئيسى حيث أن قيمة (ا ر — ء ر) به تبلغ أكبر مقدار سالب وهو — ٣ .

٢ — لحساب § نقسم $\frac{\text{س}_{\cdot}}{\text{س}_{٢}}$ فى الصفين س١ ، س٤ ونجد أن :

$$\text{صف س}_{١}: \S_{١} = \frac{١٥}{\frac{١}{٢}١} = ٣٠$$

صف س٤: $\S_{٢} = \frac{١٨}{٣} = ٦$ أصغر قيمة موجبة .

وبذلك يكون الصف الرئيسى هو صف س٤ .

أى أنه يمكن تحسين الموقف بحل أفضل إذا أدخلنا عمود س٢ محل صف س٤ .

٣ — يعتبر تقاطع الصف الرئيسى (صف س٤) مع العمود الرئيسى (عمود س٢) أى رقم (٣) المفتاح .

٤ — تحسب عناصر الصف الرئيسى الجديد كالآتى :

(ا) نستبدل س٢ فى عمود المتجة الأساسى بدلا من س٤ كما نستبدل معامل ربح س٢ (٨) بدلا من معامل ربح س٤ (صفر) فى عمود ر .

(ب) نقسم جميع عناصر الصف الرئيسى على المفتاح (٣) ويكون الصف الجديد كالآتى :

س٢	صفر	١	— ١/٣	١/٣	٦ ٢/٣

٥ — تحسب العناصر الجديدة للصف الآخر (صف س١) أما عن طريق عمليات الصفوف أو عن طريق القانون .

(ا) عن طريق عمليات الصفوف :

عناصر صف س١ القديم	١	١/٢	١/٦ صفر	١٥	١٠٠/٦
— عناصر س٢ الجديد × ١/٢	صفر	١/٢	١/٦ ١٢/١٨	٣	٦٠/١٨
باقى الطرح أو عناصر صف س١ الجديد	١	صفر	٢/٩ — ١/٦	١٢	٢٣٠/١٨

ويمكن تطبيق القانون كالآتى :

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{الرقم المقابل ف الصف الرئيسى} \times \text{الرقم المقابل ف العمود الرئيسى}}{\text{المفتاح}}$$

$$١ - \frac{\text{صفر} \times \frac{١}{٢}}{٣} = ١ - \text{صفر} = ١$$

$$\frac{١}{٢} - \frac{\frac{١}{٢} \times ٣}{٣} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} = \text{صفر}$$

$$\frac{١}{٦} - \frac{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}-}{٣} = \frac{١}{٦} + \frac{١}{١٢} = \frac{٢}{٤}$$

$$\text{صفر} - \frac{\frac{١}{٢} \times ١}{٣} = \text{صفر} - \frac{١}{٦} = -\frac{١}{٦}$$

$$١٥ - \frac{\frac{١}{٢} \times ١٨}{٣} = ١٥ - ٣ = ١٢$$

$$\frac{٢}{٣}٠ - \frac{\frac{١}{٢} \times \frac{٦}{٣}٠}{٣} = \frac{١}{٢}٠ - \frac{٦}{١٢}٠ = \frac{٢٣}{١٢}٠$$

وهى نفس الأرقام المستنتجة بطريقة عمليات الصفوف .

٦ — نكمل الجدول الثالث بالتعديلات السابقة ثم نعيد حساب ا ر ، (ا ر ـ ء ر) لاختبار المثالية للحل الجديد ، كما يلى :

ر	ع (ر)	١٠	٨	صفر	صفر	صفر	(١٨)
	المتجه الاساسى	س١	س٢	س٣	س٤	س-	مجموع المراجعة
١٠	س١	١	صفر	٢/٣	-١/٣	١٢	٢٣٠/١٨
٨	س٢	صفر	١	-١/٣	١/٣	٦	٦٠/١
	اختبار المثالية						
ا ر (١)		١٠	٨	٤/٣	١	١٦٨	١٠/٣
(ا ر — ع ر)		صفر	صفر	٤/٣	١	١٦٨	١/٣

(١) حسبت قيم ا ر بضرب عمود ر بعد تحويره إلى صف فى معاملات كل عمود كالآتى :

عمود س١ (١ ، صفر) $\binom{١٠}{٨} = ١ \times ١٠ + \text{صفر} \times ٨$

$= ١٠$

عمود س٢ (صفر ، ١) $\binom{١٠}{٨} = \text{صفر} \times ١٠ + ١ \times ٨$

$= ٨$

عمود س٣ (٢/٣ ، -١/٣) $\binom{١٠}{٨} = ٢/٣ \times ١٠ - ١/٣ \times ٨$

$= ٤/٣$

عمود س٤ (-١/٣ ، ١/٣) $\binom{١٠}{٨} = -١/٣ \times ١٠ + ١/٣ \times ٨$

$= ١$

عمود س. $\begin{pmatrix} ١٠ \\ ٨ \end{pmatrix}$ (١٢ ، ٦) = ١٠ × ١٢ + ٦ × ٨ = ١٦٨

عمود مجموع المراجعة $\begin{pmatrix} ١٠ \\ ٨ \end{pmatrix}$ $\left(\frac{٢٣٠}{١٨} ، \frac{٦٠}{٢}\right)$ = ١٠ × $\frac{٢٣٠}{١٨}$ + ٨ × $\frac{٦٠}{٢}$ = $\frac{٦٠}{٣}$

(٢) تراجع مفردات عمود مجموع المراجعة كالآتى :

صف س١ : حاصل جمع ١ + صفر + $\frac{٢}{٩}$ − $\frac{١}{٢}$ + ١٢ = $\frac{٢٣٠}{١٨}$

صف س٢ : حاصل جمع صفر + ١ − $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ + ٦ = ٦٠

صف ا ر : حاصل جمع ١٠ + ٨ + $\frac{٤}{٣}$ + ١ + ١٦٨ = $\frac{٦٠}{٣}$

صف (ا ر − ى ر) :

حاصل جمع صفر + صفر + $\frac{٤}{٣}$ + ١ + ١٦٨ = $\frac{١١٠}{٣}$

أى أن جميع العمليات الحسابية بالجدول صحيحة .

٣ — بمراجعة صف ا ر − ى ر نجد أن جميع بواقى الطرح فى هذا الصف موجبة أى أن جميع الأرباح المستهدفة وبذلك يكون هذا الحل هو الحل الأمثل .

تفسير الحل : إذا لاحظنا المصفوفة الرئيسية بالجدول نجد أنها تنقسم لى:

	س١ س٢		س٣ س.		س.
س١	١	صفر	$\frac{٢}{٣}$		١٢
س٢	صفر	١	$-\frac{١}{٣}$		٦
			$-\frac{١}{٣}$		

∴ س٣ ، س٤ تمثل عدد ساعات عاطلة وليس لهـا علاقة بعدد الوحدات ولذلك يمكن إهمالها والاكتفاء بباقى المصفوفة كالآتى :

$$\begin{matrix} & س_1 & س_2 & س_3 \\ س_1 \\ س_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} ١ & صفر \\ صفر & ١ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ١٢ \\ ٦ \end{pmatrix}$$

ويمكن تحويل هذه المصفوفة إلى معادلات كالآتى :

$س_1 + صفر\ س_2 = ١٢$ ∴ $س_1 = ١٢$

$صفر\ س_1 + س_2 = ٦$ ∴ $س_2 = ٦$

∴ التوزيع الأمثل للانتاج هو ١٢ وحدة من المنتج $س_1$

٦ وحدات من المنتج $س_2$

مثال ٣/٣ :

تنتج أحدى المصانع ثلاث منتجات ويبلغ مجمل الربح لكل وحدة كالآتى:

$س_1 = ٢ج$ ، $س_2 = ٤ ج$ ، $س_3 = ٣ ج$.

ويمر كل من هذه المنتجات على ثلاثة مراكز إنتاجية وتحتاج كل وحدة من كل منتج إلى عدد الساعات الآتية فى كل قسم :

	المركز الإنتاجى (١)	(٢)	(٣)
$س_1$	٣ ساعة	٢ ساعة	١ ساعة
$س_2$	٤ »	١ »	٣ »
$س_3$	٢ »	٢ »	٢ »
مجموع الساعات المتاحة فى كل مركز إنتاجى	٦٠	٤٠	٨٠

والمطلوب تحديد معدل المزج الأمثل للمنتجات الثلاثة .

الحـــــــل :

أولا : ترتيب عناصر المشكلة :

١ — الهدف المنشود : (ر) = ٢ س١ + ٤ س٢ + ٣ س٣

٢ — القيود الثابتة والعوامل المحددة .

٣ س١ + ٤ س٢ + ٢ س٣ ≥ ٦٠

٢ س١ + س٢ + ٢ س٣ ≤ ٤٠

س١ + ٣ س٢ + ٢ س٣ ≥ ٨٠

٣ — شروط عدم السلبية . س١ ≥ صفر

س٢ ≥ صفر

س٣ ≥ صفر

ثانياً : أو حل بدائى ممكن :

١ — تحويل المتباينات إلى معادلات :

٣ س١ + ٤ س٢ + ٢ س٣ + س٤ = ٦٠

س١ + س٢ + ٢ س٣ + س٥ = ٤٠

س١ + ٣ س٢ + ٢ س٣ + س٦ = ٨٠

ويمكن ترتيبها فى شكل مصفوفات كالآتى :

	س١	س٢	س٣		س٤	س٥	س٦		س.
	٣	٤	٢		١	صفر	صفر		٦٠
(	٢	١	٢	) (	صفر	١	صفر	) =	(٤٠)
	١	٣	٢		صفر	صفر	١		٨٠

٢ — يستكمل الجدول الأول لأول حل بدائى ممكن كالتالى .

ر	ى (ر)	٢	٤	٣	صفر	صفر	صفر		٩
	المتجه الأساسى	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٠	مجموع المراجعة
صفر	س٤	٣	٤	٢	١	صفر	صفر	٦٠	٧٠
صفر	س٥	٢	١	٢	صفر	١	صفر	٤٠	٤٦
صفر	س٦	١	٣	٢	صفر	صفر	١	٤٠	٨٧
	اختبار المثالية								
	ا ر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	ا ر — ى ر	— ٢	— ٤	— ٣	صفر	صفر	صفر	صفر	— ٩

من اختبار المثالية فى صف (ا ر — ى ر) نجد أنه من الممكن إيجاد حل أفضل وذلك لوجود عدة مقادير سالبة .

ثالثاً : إيجاد حل أفضل من الحل السابق .

ولإيجاد حل أفضل من الحل السابق تتبع الخطوات الآتية .

١ — العمود الرئيسى هو عمود س٢ لشموله على أكبر مقدار سالب (— ٤) .

٢ — للبحث عن الصف الرئيسى نحسب قيم § بقسمة عمود س. على عمود س٢ كالآتى .

§١ (فى صف س٤) = ٦٠ ÷ ٤ = ١٥ (أصغر قيمة موجبة)

§٢ (فى صف س٥) = ٤٠ ÷ ١ = ٤٠

§٣ (فى صف س٦) = ٨٠ ÷ ٣ = ٢٦ ٨/٣

أى أن الصف الرئيسى هو صف س٤

وبذلك يمكن تحسين الحل بإدخال س٢ بدلا من س٤ واستخدام عمود س٢ كعمود رئيسى وصف س٤ كصف رئيسى ويكون المفتاح هو (٤) تقاطع العمود الرئيسى (س٢) بالصف الرئيسى (س٤) .

وبذلك تجرى العمليات كالآتى :

١ — صف س٤ (الرئيسى) يقسم على ٤ (المفتاح) وتستبدل س٤ ومعامل ربحها (صفر) بالمتغير س٢ ومعامل ربحه (٤) .

الصف القديم : صفر س	٣	٤	٢	١	صفر	صفر	٦٠ ٧٠
الصف الجديد . ٤ س٢	$\frac{٤}{٤}$	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	صفر	صفر	١٥ $\frac{٢٠}{٣}$

٢ — صف س٥ : يتم تغييره باحدى الطريقتين الاتيتين :

(ا) عمليات الصفوف :

بهدف إيجاد المعامل فى عمود س٢ صفر نطرح صف س٢ الجديد من صف س٥ كالآتى :

صف س٥ القديم ٢ ١ ٢ صفر ١ صفر ٤٠ ٤٦

— صف س٢ الجديد $\frac{٣}{٤}$ ١ $\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٤}$ صفر صفر ١٥ $\frac{٣٠}{٣}$

= صف س٥ الجديد $\frac{٥}{٤}$ صفر $\frac{٣}{٢}$ — $\frac{١}{٤}$ ١ صفر ٢٥ $\frac{٧٥}{٣}$

(ب) باستخدام المعادلة :

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{الرقم المقابل فى الصف الرئيسى} \times \text{الرقم المقابل فى العمود الرئيسى}}{\text{المفتاح}}$$

$$٢ - \frac{١ \times ٣}{٤} = ٢ - \frac{٣}{٤} = \frac{٥}{٤}$$

$$١ - \frac{١ \times ٤}{٤} = ١ - ١ = \text{صفر}$$

$$٢ - \frac{١ \times ٢}{٤} = ٢ - \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$$

$$\text{صفر} - \frac{١ \times ١}{٤} = \text{صفر} - \frac{١}{٤} = -\frac{١}{٤}$$

$$١ - \frac{\text{صفر} \times ١}{٤} = ١ - \text{صفر} = ١$$

$$\text{صفر} - \frac{\text{صفر} \times ١}{٤} = \text{صفر} - \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$٤٠ - \frac{١ \times ٦٠}{٤} = ٤٠ - ١٥ = ٢٥$$

$$٤٦ - \frac{١ \times ٧٠}{٤} = ٤٦ - ٢١ = ٢٥$$

٣ ـــ صف س٦ : يتم تغييره بإحدى الطريقتين الاتيتين :

(ا) عمليات الصفوف :

وتهدف لإيجاد المعامل فى عمود س٢ صفر ولذلك نطرح صف س٢

الجديد مضروبا فى ٣ من صف س٦ القديم كالآتى .

صف س٦ القديم	١	٣	٢	صفر	صفر	١ ٨٠	٨٧
— ٣ × س٢ الجديد	$\frac{٩}{٤}$	٣	$\frac{٣}{٢}$	$\frac{٣}{٤}$	صفر	صفر	$\frac{٤٥٠}{٢}$
= صف س٦ الجديد	$\frac{٥}{٤}$	—	صفر	$\frac{١}{٢}$	—	$\frac{٣}{٤}$	صفر ١ ٣٥ $\frac{٦٩}{٢}$

(ب) باستخدام المعادلة :

$$\text{القيمة القديمة} = \frac{\text{الرقم المقابل فى الصف الرئيسى} \times \text{الرقم المقابل فى العمود الرئيسى}}{\text{المفتاح}}$$

١ — $\quad = \frac{٩}{٤} - ١ = \frac{٣ \times ٣}{٤} = \frac{٥}{٤} -$

٣ — $\quad = ٣ - ٣ = \frac{٣ \times ٤}{٤} =$ صفر

٢ — $\quad = - ٢ = \frac{٣ \times ٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

صفر — $\frac{٣ \times ١}{٤} = \frac{٣}{٤} —$

صفر — $\frac{\text{صفر} \times ٣}{٤} =$ صفر

١ — $\frac{\text{صفر} \times ٣}{٤} = ١$

$$٣٥ = ٤٥ - ٨٠ = \frac{٣ \times ٦٠}{٤} - ٨٠$$

$$٦١\frac{١}{٢} = \frac{١٠٥}{٢} - ٨٧ = \frac{٣ \times ٧٠}{٤} - ٨٧$$

وبناء على ذلك يمكن تصوير الجدول الثانى الذى يمثل الحل الممكن كالتالى .

(ر)	ع ر	٢	٨	صفر	صفر	صفر	صفر	٩
	المتجه الأساسى	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س	مجموع المراجعة
٤	س٢	$\frac{٣}{٤}$	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	صفر	صفر	١٥	$\frac{٣٥}{٢}$
صفر	س٥	$\frac{٥}{٤}$	صفر	$\frac{٣}{٢}$	$-\frac{١}{٤}$	١	صفر	٢٥	$\frac{٥٧}{٢}$
صفر	س٦	$-\frac{٥}{٤}$	صفر	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{٣}{٤}$	صفر	١	٣٥	$\frac{٦١}{٢}$
اختيار المثالية									
(ا ر)		٣	٤	٢	١	صفر	صفر	٦٠	٧٠
(ا ر — ع ر)		١	صفر	—١	١	صفر	صفر	٦٠	٦١

(١) حسبت قيمة ا ر بضرب عمود ر بعد تحويره إلى صف × معاملات كل عمود كالآتى .

عمود س١ : (٤ ، صفر ، صفر) $\begin{pmatrix} \frac{٣}{٤} \\ \frac{٥}{٤} \\ -\frac{٥}{٤} \end{pmatrix}$ = ٤ × $\frac{٣}{٤}$ = ٣٠

عمود س٢ : (٤ ، صفر ، صفر) $\begin{pmatrix} 1 \\ \text{صفر} \\ \text{صفر} \end{pmatrix}$ = ٤ × ١ = ٤

عمود س٣ : (٤ ، صفر ، صفر) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ = ٤ × $\frac{1}{2}$ = ٢

عمود س٤ : (٤ ، صفر ، صفر) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ = ٤ × $\frac{1}{4}$ = ١

عمود س٥ : (٤ ، صفر ، صفر) $\begin{pmatrix} \text{صفر} \\ 1 \\ \text{صفر} \end{pmatrix}$ = صفر

عمود س٦ : (٤ ، صفر ، صفر) $\begin{pmatrix} \text{صفر} \\ \text{صفر} \\ 1 \end{pmatrix}$ = صفر

عمود س : (٤ ، صفر ، صفر) $\begin{pmatrix} 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$ = ٤ × ١٥ = ٦٠

عمود المراجعة : (٤ ، صفر ، صفر) $\begin{pmatrix} 35 \\ 3 \\ 57 \\ 3 \\ 69 \\ 3 \end{pmatrix}$ = ٤ × $\frac{35}{2}$ = ٧٠

٢ — تراجع مفردات عمود مجموع المراجعة كالآتى :

صف س٢ : حاصل جمع

$$\frac{٣}{٤} + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \text{صفر} + \text{صفر} + ١٥ = \frac{٣٠}{٢}$$

صف س٥ : حاصل جمع

$$\frac{٥}{٤} + \text{صفر} + \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢} + ١ + \text{صفر} + ٢٥ = \frac{٥٧}{٢}$$

صف س٦ . حاصل جمع

$$-\frac{٥}{٤} + \text{صفر} + \frac{١}{٢} - \frac{٣}{٤} + \text{صفر} + ١ + ٣٥ = ٦١$$

صف ا ر. حاصل جمع

$$٣ + ٤ + ٢ + ١ + \text{صفر} + \text{صفر} + ٦٠ = ٧٠$$

صف (ا ر ـ ى ر) . حاصل جمع

$$١ + \text{صفر} - ١ + ١ + \text{صفر} + \text{صفر} + ٦٠ = ٦١$$

رابعا : إيجاد حل آخر أفضل من الحل السابق .

من اختبار المثالية للجدول السابق فى صف (ا ر ـ ى ر) ، نلاحظ أنه من الممكن إيجاد حل أفضل وذلك لوجود بعض أرقام سالبة . ولذلك نتبع نفس الخطوات السابقة لإيجاد حل أفضل .

١ — العمود الرئيسى هو عمود س٣ لشموله على أكبر مقدار سالب (ـ ١) .

٢ — للبحث عن الصف الرئيسى نحسب قيم § بقسمة عمود س. على عمود س٣ كالآتى :

§١ (فى صف س٢) = ١٥ ÷ ½ = ٣٠

§٣ (فى صفر س٥) = ٢٥ ÷ ٣/٢ = ٣٠ (أصغر قيمة موجبة)

§٣ (فى صف س٦) = ٣٥ ÷ ½ = ٧٠

أى أن الصف الرئيسى هو صف س٥

وبذلك يمكن تحسين الحل بادخال س٣ بدلا من س٥ واستخدام عمود س٣ كعمود رئيسى وصف س٥ كصف رئيسى ويكون المفتاح هو (٣/٢) تقاطع العمود الرئيسى (س٣) بالصف الرئيسى (س٥)

وبعد ذلك تجرى العمليات كالاتى .

١ — صف س٥ (الرئيسى) يقسم على ٣/٢ (المفتاح) وتستبدل س٥ ومعامل ربحها (صفر) بالمتغير س٢ ومعامل ربحه (٣) .

الصف القديم : صفر س٥ ٥/٤ صفر ٣/٢ — ١/٤ ١ صفر ٢٥ ٥٧/٣

الصف الجديد : ٣ س٣ ٥/٦ صفر ١ — ١/٦ ٢/٣ صفر ٥٠/٣ ١٩

٢ — صف س٢ : يتم تغييره باحدى الطريقتين الاتيتين .

(ا) عمليات الصفوف .

يهدف تحويل المعامل فى س٣ إلى صفر فنطرح صف س٣ الجديد مضروبا فى ½ من صف س١ القديم .

صف س٢ القديم : ٣/٤ ١ ½ ١/٤ صفر صفر ١٥ ٣٠

— صف س٣ الجديد × ½ : ٥/٣٢ صفر ½ — ١/٣٢ ١/٣ صفر ٢٠/٣ ١٩/٣

صف س٢ الجديد : ١/٣ ١ صفر ½ — ١/٣ صفر ٢٠/٣ ٨

(ب) باستخدام المعادلة :

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{الرقم المقابل فى الصف الرئيسى} \times \text{الرقم المقابل فى العمود الرئيسى}}{\text{المفتاح}}$$

$\frac{٣}{٤}$ — $\frac{\frac{١}{٢} \times \frac{٠}{٤}}{\frac{٣}{٢}}$ = $\frac{٣}{٤}$ — $\frac{٠}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$

١ — $\frac{\frac{١}{٢} \times \text{صفر}}{\frac{٣}{٢}}$ = ١ — صفر = ١

$\frac{١}{٢}$ — $\frac{\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢}}{\frac{٣}{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ — $\frac{١}{٢}$ = صفر

$\frac{١}{٤}$ — $\frac{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤-}}{\frac{٣}{٢}}$ = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$

صفر — $\frac{\frac{١}{٢} \times ١}{\frac{٣}{٢}}$ = صفر — $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٣-}$

صفر — $\frac{\frac{١}{٢} \times \text{صفر}}{\frac{٣}{٢}}$ = صفر — صفر = صفر

١٥ — $\frac{\frac{١}{٢} \times ٢٥}{\frac{٣}{٢}}$ = ١٥ — $\frac{٢٥}{٣}$ = $\frac{٢٠}{٣}$

$\frac{٣٥}{٣}$ — $\frac{\frac{١}{٢} \times \frac{٠٧}{٣}}{\frac{٣}{٢}}$ = $\frac{٣٥}{٣}$ — $\frac{١٩}{٣}$ = ٨

٣ — صف س٦ : يتم تغييره باحدى الطريقتين الآتيتين:

(ا) عمليات الصفوف :

بهدف تحويل المعامل فى عمود س٣ إلى صفر نطرح صف س٣ الجديد مضروبا فى ١/٣ من صف س٦ القديم :

صف س٦ القديم :

— ٥/٤ صفر ١/٣ — ٣/٤ صفر ١ ٣٥ ٦١/٢

— صف س٣ الجديد × ١/٣ :

٢/٣ صفر ١/٣ — ١/٣ ١/٣ صفر ٢٥/٣ ١١/٢

صف س٦ الجديد .

— ٥/٣ صفر صفر — ٢/٣ — ١/٣ ١ ٨٠ ٢٥

(ب) باستخدام المعادلة :

$$\text{القيمة القديمة} - \frac{\text{الرقم المقابل فى العمود الرئيسى} \times \text{الرقم المقابل فى الصف الرئيسى}}{\text{المفتاح}} = \text{القيمة الجديدة}$$

$$\frac{٥/٤ \times ١/٣}{٣/٢} - ٥/٤ - = ٥/٣ - = ٢/٣ ٥ - ٥/٤ -$$

$$\frac{\text{صفر} \times ١/٢}{٣/٢} - \text{صفر} = \text{صفر} - \text{صفر} - = \text{صفر}$$

$$\frac{١/٣ \times ٣/٢}{٣/٢} - ١/٢ - = ١/٢ = \text{صفر}$$

$$\frac{٢}{٣}- = \frac{١}{٢٢} + \frac{٣}{٤}- = \frac{\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤}-}{\frac{٣}{٣}} - ٤ -$$

$$\frac{١}{٣}- = \frac{١}{٣}- = \text{صفر} - \frac{\frac{١}{٣} \times ١}{\frac{٣}{٣}} - \text{صفر}$$

$$١ = \text{صفر} - ١ = \frac{\frac{١}{٣} \times \text{صفر}}{\frac{٣}{٣}} - ١$$

$$\frac{٨٠}{٣} = \frac{٢٥}{٣} - ٣٥ = \frac{\frac{١}{٣} \times ٢٥}{\frac{٣}{٢}} - ٣٥$$

$$٢٥ = \frac{١٩}{٢} - \frac{٦٩}{٢} = \frac{\frac{١}{٣} \times \frac{٥٧}{٣}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{٦٩}{٢}$$

وبناء على ذلك يمكن تصوير الجـــدول الثالث الذى يمثل الحل الممكن التالى :

ر	ى ر المتجه الأساسى	٢ س١	٤ س٢	٣ س٣	صفر س٤	صفر س٥	صفر س٦		٩ مجموع المراجعة (٢)
٤	س٢	$\frac{١}{٣}$	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$	صفر	$\frac{٢٠}{٣}$	٨
٣	س٣	$\frac{٥}{٣}$	صفر	١	$-\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	صفر	$\frac{٥٠}{٣}$	١٩
صفر	س٦	$-\frac{٥}{٣}$	صفر	صفر	$-\frac{٣}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$	١	$\frac{٨٠}{٣}$	٢٥
الأختيار المثالية (ا ر − ى ر)		$\frac{٢٣}{٣}$	٤	٤	$\frac{٥}{٣}$	$\frac{٢}{٣}$	صفر	$\frac{٢٣٠}{٣}$	٨٩
		$\frac{١١}{٣}$	صفر	صفر	$\frac{٥}{٣}$	$\frac{٢}{٣}$	صفر	$\frac{٢٢٠}{٣}$	٨٠

(١) حسب قيمة ا ر بضرب عمود س بعد تحويره إلى صف فى معاملات كل عمود كالآتى :

$$\frac{٥}{٦} \times ٣ + \frac{١}{٣} \times ٤ = \frac{١٠}{٣}$$

عمود س١ : (٤ ، ٣، صفر) $\begin{pmatrix} \frac{١٠}{٣} \\ \frac{٥}{٦} \\ -\frac{٥}{٣} \end{pmatrix} = \frac{٢٣}{٦}$

$$١ \times ٤ = ١$$

عمود س٢ : (٤ ، ٣، صفر) $\begin{pmatrix} ١ \\ \text{صفر} \\ \text{صفر} \end{pmatrix} = ٤$

$$١ \times ٣ = \text{صفر}$$

عمود س٣ : (٤، ٣ ، صفر) $\begin{pmatrix} \text{صفر} \\ ١ \\ \text{صفر} \end{pmatrix} = ٣$

$$\frac{١}{٦} \times ٣ - \frac{١}{٣} \times ٤ = \frac{١}{٣}$$

عمود س٤ : (٤ ، ٣، صفر) $\begin{pmatrix} \frac{١}{٣} \\ -\frac{١}{٦} \\ -\frac{٢}{٣} \end{pmatrix} = \frac{٥}{٦}$

$$\frac{٢}{٣} \times ٣ + \frac{١}{٣} \times ٤ - = -\frac{١٠}{٣}$$

عمود س٥ : (٤ ، ٣ ، صفر) $\begin{pmatrix} -\frac{١٠}{٣} \\ \frac{٢}{٣} \\ -\frac{١٠}{٣} \end{pmatrix} = \frac{٢}{٣}$

عمود س٦ : (٤ ، ٣، صفر) $\begin{pmatrix} \text{صفر} \\ \text{صفر} \\ ١ \end{pmatrix} = \text{صفر}$

$$\frac{٥٠}{٣} \times ٣ + \frac{٢٠}{٣} \times ٤ = \frac{٢٠}{٣}$$

عمود س- : (٤ ، ٣، صفر) $\begin{bmatrix} \frac{٢٠}{٣} \\ \frac{٥٠}{٣} \\ \frac{٨٠}{٣} \end{bmatrix} = \frac{٢٣٠}{٣}$

$$١٩ \times ٣ + ٨ \times ٤ = ٨$$

عمود مجموع المراجعة: (٤، ٣، صفر) $\begin{bmatrix} ٨ \\ ١٩ \\ __ \end{bmatrix} = ٨٩$

(٢) تراجع مفردات عمود مجموع المراجعة كالآتى .

صف س٢ : حاصل جمع

$\frac{١}{٣} + ١ +$ صفر $+ \frac{١}{٣} - \frac{١}{٣} +$ صفر $+ \frac{٢}{٣} = ٨$

صف س٣ : حاصل جمع

$\frac{٥}{٦} +$ صفر $+ ١ - \frac{١}{٦} + \frac{٢}{٣} +$ صفر $+ \frac{٥}{٣} = ١٩$

صف س٦ : حاصل جمع

$- \frac{٥}{٣} +$ صفر $+$ صفر $- \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣} + ١ + \frac{٨}{٣} = ٢٥$

صف ا ر : حاصل جمع

$\frac{٢٣}{٦} + ٤ + ٣ + \frac{٥}{٦} + \frac{٢}{٣} +$ صفر $+ \frac{٢٣٠}{٣} = ٨٩$

صف (ا ر - ى ر) : حاصل جمع .

$\frac{١٠}{٦} +$ صفر $+$ صفر $+ \frac{٥}{٦} + \frac{٢}{٣} +$ صفر $+ \frac{٢٣٠}{٣} = ٨٠$

الحل الامثل

من اختبار المثالية فى الجدول السابق لانجد أى رقم سالب فى صف (ا ر - ى ر) . ومعنى ذلك أن الربح المحقق يزيد على الربح المستهدف فى كافة الأعمدة وبذلك يكون الجدول الأخير ممثلا للحل الأفضل والتوزيع الأمثل للمنتجات . وبذلك يكون التوزيع الأمثل كالآتى .

س١ = صفر (لم تدخل س١ فى الجدول ولا يوجد صف س١)

س٢ = $\frac{٢}{٣}$ (صف س٢ عمود س.)

س٣ = $\frac{٥}{٣}$ (صف س٣ عمود س.)

س٦ = $\frac{٨}{٣}$ (صف س٦ عمود س.)

وتمثل عدد ساعات عاطلة فى القسم الإنتاجى (٢) .

وبحسب الربح الأمثل كالاتى .

$= \frac{٢}{٣}$ ٠ وحدة من س٢ بمعدل ربح ٤ ج للوحدة .

$+ \frac{٥}{٣}$ ٠ وحدة من س٢ بمعدل ربح ٣ ج للوحدة .

$+ \frac{٨}{٣}$ ٠ ساعة من س٦ بمعدل ربح صفر .

$= \frac{٢}{٣}$ ٠ × ٤ + $\frac{٥}{٣}$ ٠ × ٣

$= \frac{٨}{٣}$ ٠ + $\frac{١٥}{٣}$ ٠ $= \frac{٢٣}{٣}$ ٠ $= ٧٦\frac{٢}{٣}$ جنيه .

الفصل الثانى

من

الباب الثالث

طريق السمبلكس ومشاكل تخفيض التكاليف

SIMPLEx NETHOD & PROBLEMS OF COSTi MINIMIZATION

تستخدم طريقة السمبلكس فى مشاكل تخفيض التكاليف باتباع نفس الخطوات المتبعة فى تضخيم الأرباح .

ويلاحظ أنه عند تضخم الأرباح بدأنا فى الحل البدائى من الصفر وذلك باستخدامنا المتغيرات الراكدة أو المكملة فى الحل وفرضنا كافة المتغيرات الأساسية صفراً وبعد ذلك نبحث عن زيادة الأرباح عن طريق إدخال المتغيرات الأصلية فى الحل تبعاً لإختبار المثالية .

وكنا نبحث فى اختيار المثالية عن الأرقام السالبة التى تبين مدى زيادة الأرباح التى يمكن تحقيقها إذا أدخلت المتغيرات التى يقبعها ذلك العمود المحتوى على المقدار السالب فى الحل . وبتطبيق نفس هذه الأفكار على تخفيض التكاليف فإننا نبدأ أيضاً بنقطة الصفر ثم نبحث عن الحلول الأفضل عن طريق اختبار المثالية واختبار المتغيرات المتعلقة بالأعمدة ذات المقادير الموجبة التى تبين مدى نقص التكاليف التى يمكن تحقيقها إذا أدخلت هذه المتغيرات فى الحل . ويرمز الهدف المنشور فى هذه الحالة ء (ت) بدلا من ء (ر) .

وهناك فرق آخر بين القيود والعوامل المحددة فى مشاكل التخفيض عنها فى مشاكل التضخيم وهى أنه بينما تركز القيود والعوامل المحددة فى حالات تضخيم الأرباح على الموارد المحدودة وتصوير المتباينات فى صورة يساوى أو أقل من ($\leq$) بينما تركز القيود والعوامل المحددة فى حالات تخفيض التكاليف على مستويات الجودة والمواصفات المطلوبه وتصوير المتباينات فى صورة تساوى أو أكثر من ($\geq$) . وتسبب لنا المتباينات أكثر من مشكلة أخرى وهى أن المتغيرات الراكدة سوف تكون سلبية حيث أنه لتحويل متباينة (س١ $\geq$ ٤٠٠٠) تصور المعادلة كالآتى : س١ − س٣ = ٤٠٠٠ . وسيكون هذا المعامل السالب للمتغير س٣ عائق فى الحل بطريقة السمبلكس حيث أنه من غير المعقول أن يكون ناتج س٣ فى الحياة العملية سالب ولذلك نمنع ظهوره فى الناتج ونفرضه صفر ونضيف مادة جديدة تكون بديلا مقبولا للمتغير س١ ، مادة تأخذ مكانه فى الحل الأول ولذلك يستخدم متغير أخر اصطناعى Artificial Variable ويكون موجبا لكن ذات قيمة سالبة . ويسمى متغير إصطناعى لأنه ليس له مكان رئيسى فى المعادلة حيث أن قيمته سالبة مما يتنافى مع شرط عدم السلبية فى أسلوب البرامج الخطية. [وتمثل فى الجدول بالقيمة (— م) وتمثل خسارة غير متوقعة] وسنعمل على التخلص من هذه المتغيرات فى أول تغيرات تدخل فى الحل بالإنتقال من جدول إلى جدول آخر .

ويمكن شرح ذلك فى المثال التالى .

مثال ٣/ ٤ .

مصنع به مركزان للانتاج ص١ ، ص٢ وتبلغ الطاقة الإنتاجية لكل

مركز ٩٠ ساعة و ٤٨ ساعة على الترتيب فى الأسبوع . ويمكن أن ينتج منتجين فى هذين المركزين س١ ، س٢ بحيث يحتاج المنتج الأول س١ إلى ٦ ساعات فى مركز ص١ ، ٢ ساعتين فى مركز ص٢ بينما يحتاج المنتج الثانى س٢ إلى ٣ ساعات فى مركز ص١ ، ٤ ساعات فى مركز ص٢ . والمطلوب تخفيض التكاليف اللازمة لأدنى حد ممكن علما بأن كل وحدة من المنتج س١ تساهم فى ١٠ ج وكل وحدة من المنتج س٢ تساهم فى ٨ ج .

الحل

أولا : نبدأ بالخطوات السابق ذكرها فى الأمثله السابق عن تضخيم الأرباح .

١ — تحدد الهدف أو دالة تخفيض التكلفة .

ء (ت) = ٩٠ ص١ + ٤٨ ص٢

حيث تمثل ص١ ، ص٢ التكلفة عن كل ساعة تشغيل فى مركزى الإنتاج ص١ ، ص٢ .

٢ — تمثيل المقيدات كالآتى .

مساهمة عناصر الانتاج المنتج س١ : ٦ ص١ + ٢ ص٢ ≥ ١٠

« « « « س٢ : ٣ ص١ + ٤ ص٢ ≥ ٨

حيث أن مساهمة المنتج س١ ، س٢ هى الحد الأدنى لما يمكن أن تساهم به فى خفض التكلفة .

٣ — شرط عدم السلبية ص١ ≥ صفر ، ص٢ ≥ صفر

ثانيا : تحويل المتباينات إلى معادلات على النحو التالى

$$٦ ص_{١} + ٢ ص_{٢} - ص_{٣} + م_{١} = ١٠$$

$$٣ ص_{١} + ٤ ص_{٢} - ص_{٤} + م_{٢} = ٨$$

حيث أن كل من ص٣ ، ص٤ تمثل الفائدة المضاعة فى حالة استغلال الطاقة فى المركزين فى انتاج كل من المنتج س١ ، س٢ وطبقا للمتغيرات بالمثال وتكون هذا المتغيرات سالبة القيمة مما يتنا فى ويتعارض مع شرط عدم السلبية ولذلك اضفنا م١ ، م٢ حيث أنها تمثل متغيرات اضافية اصطناعية سالبة تعبر عن قيم تكلفة مرتفعة للغاية وذلك لا مكان تصميم الجدول البدائى الذى يقوم على أساس عدم انتاج أى شىء وحينئذ تعتبر المتغيرات الاصطناعية مرتبطة بمعامل تكاليف تؤثر على اتخاذ القرار واختبار المثالية التى تسعى إلى تخفيض التكلفة ولذلك تدخل م١ ، م٢ أولا فى نموذج الحل على أن نعمل على التخلص منها أولا فى الجداول المتتابعة للحل .

ويمكن تصوير الجدول الأول للسمبلكس فى هذا المثال على النحو التالى .

	ع (ت)		٩٠	٤٨	—		م		م	
ت	المتجه الاساسى		ص١	ص٢	ص٣	ص٤	م١	م٢		ص.
م	١٠		٦	٢	—١	—	١	—		١٠
م	٢٠		٣	٤	—	—١	—	١		٨
اختبار المثالية										
	ا ت		٩م	٦م	—م	—م	م	م		١٨م
	ا ت د ت		٩م — ٩٠	٦م — ٤٨	—م	—م	—	—		

** حسبت عناصر الصف ات بضرب عناصر كل عمود فى العناصر المماثلة لها فى عمودت وتمثل مجموع التكاليف الخاصة بكل عمود .

ومن الجدول السابق نجد أن هناك قيم موجبة فى صف ات — دت ولذلك لا يكون الجدول السابق معبرا للحل الأمثل ويجب الانتقال إلى جدول ثانى أفضل . ويلزم لذلك تحديد العمود الرئيسى الذى يحتـــــوى فى صف ات — دت على أكبر قيمة موجبة حيث أنها تمثل زيادة فى التكلفة الحالية عن التكلفة البديلة وحيث أن هدفنا هو تخفيض التكلفة لأدنى حد ممكن لذلك نجد أن العمود الرئيسى هو ص١ الذى به ٩ م حيث أن م تعتبر ذات قيمة كبيرة للغاية .

ولاختيار الصف الرئيسى نحسب § (ثيتا) لكل صف بقسمة العناصر المذكورة فى عمود ص. على العناصر المماثلة لها فى العمود الرئيسى ونختار الصف الذى يشمل أصغر قيمة موجبة لثيتا § .

صف م١ § = ١٠ ÷ ٦ = ١,٦٧

صف م٢ § = ٨ ÷ ٣ = ٢,٦٧

وبذلك نختار صف م١ ليكون الصف الرئيسى وبذلك يكون المفتاح هو تقاطع كل من الصف الرئيسى والعمود الرئيسى .

ولبدء العمل فى جدول السمبلكس التالى ندخل ص١ (المماثلة للعمود الرئيسى) فى الاتجاه الأساسى بدلا من م١ (المماثلة للصف الرئيسى) ونتابع خطوات الانتقال إلى الجدول الثانى على النحو الآتى . وحينئذ يمكن تصوير جدول السمبلكس الثانى على الوجه التالى :

ت	الاتجاه الاساسى	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	١٢	٢٢	ص.
		٩٠	٤٨	—	—	م		
٩٠	ص١	١		٣—	—	١/٦	—	٥/٣
م	٢٢	—	٣	↓	١—	↓	١	٣
اختبار المثالية								
	ا ت	٩٠	٣٠+٣م	١٥+١/٢م	م	١٥ ٢م	٢	١٥٠+٣م
	ا ت د ت	—	٣م—١٨	١/٢م—١٥	م	١٥—٣/٢م	—	

صف ص١ : تقسم جميع عناصر الصف الرئيسى على المفتاح (٦) كالآتى :

الصف القديم م١ ٦ ٢ —١ صفر ١ صفر ١٠

الصف الجديد ص١ ١ ٣ر —١٧ر صفر ١٧ر٠ صفر ١ر٦٧

صف م٢ : تستخدم المعادلة لتحويل جميع عناصر ذلك الصف إلى قيمها الجديدة فى الجدول الجديد

$$\text{القيمة القديمة} - \frac{\text{الرقم المقابل فى الصف الرئيسى} \times \text{الرقم المقابل فى العمود الرئيسى}}{\text{المفتاح}} = \text{القيمة الجديدة}$$

$$٣ - \frac{٣ \times ٦}{٦} = \text{صفر}$$

$$٤ - \frac{٣ \times ٢}{٦} = ٣$$

$$\text{صفر} - \frac{٣ \times ١-}{٦} = ٠٫٥$$

$$-١- \frac{٣ \times ٠}{٦} = -١$$

$$\text{صفر} - \frac{٣ \times ١}{٦} = -٠٫٥$$

$$١ - \frac{٣ \times ٠}{٦} = ١$$

$$٨ - \frac{٣ \times ١٠}{٦} = ٣$$

لمتابعة اختبار المثالية نتابع حساب عناصر الصف ات فيما يلى :

١ × ٩٠ + صفر × م = ٩٠

٠,٣٣ × ٩٠ + ٣ × م = ٣٠ + ٣م

− ١,٦٧ × ٩٠ + ٠,٥ × م = −١٥ + ٠,٥م

صفر × ٩٠ + ١ × م = م

٠,١٧ × ٩٠ − ٠,٥ × م = ١٥ − ٠,٥م

صفر × ٩٠ + ١ × م = م

١,٦٧ × ٩٠ + ٣ × م = ١٥٠ + ٣م

ومن الجدول السابق نجد أن بعض عناصر الصف (ات — وت) مازالت موجبة ولذلك لا يكون الجدول السابق هو الجدول الأمثل ونتابع خطوات الانتقال إلى جدول السمبلكس الثالث على النحو التالى :

١ ـ العمود الرئيسى هو عمـــود ص٢ حيث به أكبر قيمة موجبة فى صف (ات — وت) وهى ٣م — ١٨ .

٢ ـ الصف الرئيسى هو صف م٢ حيث به أصغر قيمة موجبة لـ §.

صف ص١ §١ = ١,٦٧ ÷ ٠,٣٣ = ٥

صف م٢ §٢ = ٣ ÷ ٣ = ١

٣ ـ المفتاح هو تقاطع العمود الرئيسى (ص٢) مع الصف الرئيسى (م٢) أى (٣)

٤ ـ عناصر الصف الرئيسى تحسب بقسمة جميع العناصر على المفتاح (٣)

الصف القديم م٢	صفر	٣	٠,٥	١	−٠,٥ ١ ٣
الصف الجديد ص٢	صفر	١	٠,١٧	٠,٣٣	−١,٠ ٠,٣٣ ٣

عناصر صف ص١ : تحسب باستخدام المعادلة

$$\text{القيمة القديمة} - \frac{\text{الرقم المقابل فى الصف الرئيسى} \times \text{الرقم المقابل فى العمود الرئيسى}}{\text{المفتاح}} = \text{القيمة الجديدة}$$

$$١ - \frac{\text{صفر} \times ٣٣\text{و}}{٣} = ١$$

$$٣٣\text{و} - \frac{٣ \times ٣٣\text{و}}{٣} = -٠\text{ر}٢٢$$

$$-\ ١٧\text{ر} - \frac{٥\text{ر} \times ٣٣\text{ر}}{٣} = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - \frac{١ \times ٣٣\text{ر}}{٣} = -\ ٠\text{ر}١١$$

$$٠\text{ر}١٧ - \frac{-\ ٥\text{ر} \times ٣٣\text{ر}}{٣} = ٠\text{ر}٢٢$$

$$\text{صفر} - \frac{١ \times ٣٣\text{ر}}{٣} = -\ ١١\text{ر}$$

$$١\text{ر}٦٧ - \frac{٣ \times ٣٣\text{ر}}{٣} = -\ ١\text{ر}٣٣$$

ونستكمل جدول السمبلكس الثالث على النحو التالى

ت	د (ت)	٩٠	٤٨	—	—	م	م	
	الاتجاه الأساسى	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	١م	٢م	ص.
٩٠	ص١	١	صفر	-٠ر٢٢	-٠ر١١	٠ر٢٢	-٠ر١	١ر٣٣
٤٨	ص٢	صفر	١	٠ر١٧	-٠ر٣٣	-١٧ر	٠ر٣٣	١
	اختبار المثالية							
	ات	٩٠	٤٨	١٢ر٠	٢٦	١٢	٧	١٦٨
	ات - دت	—	—	-١٢ر٠	٢٦	١٢ — م	٧ — م	

جميع عناصر الصف (ا ت ـ ء ت) سالبة ولذلك فالجدول السابق يمثل الحل الأمثل حيث أن ص١ = ١,٣٣٣ ج ، ص٢ = ١ ج وتمثل المساهمة الخاصة بكل ساعة تشغيل فى التكاليف .

مشكلة الثنية فى البرمجة الخطية The Dval Problem

أثار استخدام نموذج البرامج الخطية فى حل مشاكل تخفيض التكلفة بعض الاعتراضات التى تتعلق بشرط عدم السلبية وتعقيد العمليات الحسابية نتيجة استخدام المتغيرات الإضافية الاصطناعية وغير ذلك مما أدى إلى محاولة الرياضيين المقارنة بين نموذج تعظيم الأرباح ونموذج تخفيض التكلفة ودراسة العلاقة بينهما .

وإذا قارنا بين المثال السابق ٣/٤ والمثال السابق ٣/٢ نجد أن المثالين يعرضان نفس الحالة ونفس المصنع ونفس المنتجات ونفس المقيدات ولكن نافس المثال ٣/٤ مشكلة تخفيض التكلفة بينما ناقش المثال ٣/٢ مشكلة تضخيم الربح . وإذا قارنا بين النتائج فى الجدول الأمثل لكل من المثالين الموضح فى صف ا ر أو ا ت نجد أن النتائج واحد فى المثالين وهو ١٦٨ . وإذا قارنا بين المتباينات المعبرة عن الهدف والمقيدات فى المثالين ٣/٢ و ٣/٤ نجد أن مصفوفة المتباينات فى المثال ٣/٤ هى تحرير لمصفوفة المتباينات فى المثال ٣/٢ ولذلك أمكن الوصول إلى النتيجة الآتية وهى أن لكل مشكلة برمجة

خطية نموذجان النموذج الأصلى Primal Problem والنموذج الثنائى Dual preblem وبينما يتعامل النموذج الأصلى مع المدخلات يتعامل النموذج الثانى مع المخرجات والعكس صحيح . ومن الطبيعى أن ترتبط الأرباح بالتكلفة حيث أن الأرباح تمثل عائد التكلفة أو الفرق بين الايرادات

والتكلفة وكلما انخفضت التكاليف زادت الأرباح وفى المثال ٣/٢ عولجت مشكلة تضخيم الارباح عن طريق اختيار المزيج الأمثل من المنتجات (المخرجات) بينما فى المثال ٣/٤ عولجت مشكلة تخفيض التكلفة عن طريق حساب تكلفة الطاقة المستخدمة فى كل مركز إنتاج أو حساب السعر المحاسبى المدخلات . وبينما تعالج المخرجات فى شكل صفوف والمدخلات فى شكل أعمدة فى مصفوفة المدخلات والمخرجات فإن من الطبيعى أن يكون مصفوفة متباينات النموذج الثنائى تحوير لمصفوفة متباينات النموذج الأصلى .

مثال ٣/٥ :

المطلوب تحوير النموذج الثنائى لمثال ٣/٣ وإيجاد الحل الأمثل .

الحل :

نعرض أولا النموذج الأصلى كما جاء فى مثال ٣/٣

$$ع\ (ر) = ٢ س_١ + ٤ س_٢ + ٣ س_٣$$

$$٣ س_١ + ٤ س_٢ + ٢ س_٣ \geqslant ٦٠$$

$$٢ س_١ + س_٢ + ٢ س_٣ \geqslant ٤٠$$

$$س_١ + ٣ س_٢ + ٢ س_٣ \geqslant ٨٠$$

وبتحوير مصفوفة متباينات النموذج الأصلى يمكن تحوير النموذج الثنائى الخاص بتخفيض التكلفة كما يلى :

$$ع\ (ت) = ٦٠ ص_١ + ٤٠ ص_٢ + ٨٠ ص_٣$$

$$٣ ص_١ + ٢ ص_٢ + ص_٣ \geqslant ٢ \ *$$

$$٤ ص_{١} + ص_{٢} + ٣ ص_{٣} \geqq ٤ **$$

$$٢ ص_{١} + ٢ ص_{٢} + ٢ ص_{٣} \geqq ٤ ***$$

* تراجع مع معاملات $س_{١}$ فى النموذج الأصلى

** تراجع مع معاملات $س_{٢}$ فى النموذج الأصلى

*** تراجع مع معاملات $س_{٣}$ فى النموذج الأصلى

كما يلاحظ أن الطرف الثانى من متباينات المقيدات فى النموذج الأصلى أصبح هو دالة التكلفة المطلوب تخفيضها فى النموذج الثنائى وبالعكس أصبحت دالة تضخيم الربح فى النموذج الأصلى الطرف الثانى من متباينات المقيدات فى النموذج الثنائى

ويمكن تصوير جدول السمبلكس الأول لمشكلة خفض التكلفة طبقا للنموذج الثنائى كما يلى :

	ى (ت)	٦٠	٤٠	٨٠	—	—	—	م	٠	٣٠	٠
ت	الاتجاه الاساسى	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ص٥	ص٦	١م	٢٠	٣٠	ص٠
م	١م	٣	٢	١	١—	—	—	١	—	—	٢
م	٢م	٤	١	٣	—	١—	—	—	م	—	٤
م	٣م	٢	٢	٢	—	—	١—		—	١	٣
	الأختيار الثالية										
	ا ت	٩م	٥م	٦م	م	م—	م—	م	م	م	٩م
	ا ت ـ ى ت	٩م ـ ٦٠	٥م ـ ٤٠	٦م ـ ٨٠	م	م—	م—	—	—	—	

وبالنظر فى الجدول السابق نلاحظ أن :

(١) صف (ا ت — ء ت) به قيم موجبة ومعنى هذا أن الجدول المذكور لا يعتبر الجدول الأمثل ولا بد أن ننتقل إلى جدول آخر أفضل منه

(٢) العمود الرئيسى هو عمود ص١ حيث أن عنصر صف (ا ت — ء ت) هو أكبر قيمة موجبة (٩ م — ٦٠) .

(٣) بحساب قيمه § ثيتا نجد أن الصف الرئيسى هو صف م١ حيث أن قيمة ثيتا § هى أصغر قيمة موجبة

(٤) المفتاح هو الرقم (٣) تقاطع الصف الرئيسى (م١) مع العمود الرئيسى (ص١)

(٥) نحسب عناصر الصف الرئيسى فى جـــدول السمبلكس الجديد بقسمة عناصر صف م١ فى الجدول السابق على الرقم ٣ (المفتاح) كالآتى :

الصف القديم م١ ٣ ٢ ١ ٠ — صفر صفر ١ صفر صفر ٢

الصف الجديد ص١ ١ ٦٧ر٠ ٣٣ر٠ —٣٣ر٠ — — ٣٣ر٠ — — ٦٧ر٠

٦ — نحسب عناصر الصف م٢ فى الجدول الجديد باستخدام المعادلة على النحو التالى :

$$\text{القيمة القديمة} - \frac{\text{الرقم المقابل فى الصف الرئيسى} \times \text{الرقم المقابل فى العمود الرئيسى}}{\text{المفتاح}} = \text{القيمة الجديدة}$$

$$٤ - \frac{٣ \times ٤}{٣} = \text{صفر}$$

$$١ \quad - \quad \frac{٤ \times ٢}{٣} = - ١ر٦٧$$

$$٣ \quad - \quad \frac{٤ \times ١}{٣} = ١ر٦٧$$

$$صفر \quad - \quad \frac{٤ \times ١-}{٣} = ١ر٣٣$$

$$-١ \quad - \quad \frac{٤ \times صفر}{٣} = -١$$

$$صفر \quad - \quad \frac{٤ \times صفر}{٣} = صفر$$

$$صفر \quad - \quad \frac{٤ \times ١}{٣} = -١ر٣٣$$

$$١ \quad - \quad \frac{٤ \times صفر}{٣} = صفر١$$

$$صفر \quad - \quad \frac{٤ \times صفر}{٣} = صفر$$

$$٤ \quad - \quad \frac{٤ \times ٢}{٣} = ١ر٣٣$$

٧ — تحسب عناصر الصف م٣ فى جدول السمبلكس الجديد باستخدام المعادلة على النحو التالى :

٢٢١

القيمة الجديدة = القيمة القديمة − (الرقم المقابل ف الصف الرئيسى × الرقم المقابل ف العمود الرئيسى) ÷ المفتاح

٢ − (٣ × ٢) ÷ ٣ = صفر

٢ − (٣ × ٢) ÷ ٣ = ٠ر٦٧

٢ − (١ × ٢) ÷ ٣ = ١ر٣٣

صفر − (١− × ٢) ÷ ٣ = ٠ر٦٧

صفر − (صفر × ٢) ÷ ٣ = صفر

١− − (صفر × ٢) ÷ ٣ = ١−

صفر − (١ × ٢) ÷ ٣ = ٠ر٦٧−

صفر − (صفر × ٢) ÷ ٣ = صفر

$$١ - \frac{\text{صفر} \times ٢}{٣} = ١$$

$$٣ - \frac{٢ \times ٢}{٣} = ١٫٦٧$$

وبذلك يمكن تصوير جدول السمبلكس الثانى فى حل هذه المشكلة كما يلى :

	(و) ت ٦٠	٤٠	٠٧	—	—	—	م	م	
ت	الاتجاه الاساسى ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ص٥	ص٦	م١	م٢	ص٠
٦٠	ص١ ١	٠٫٦٧	٠٫٣٣	-٠٫٣٣	صفر	صفر	٠٫٣٣	صفر	٠٫٦٧
م	م٢ صفر	-٠٫٦٧	١٫٦٧	١و٣٣	١	صفر	-١٫٣٣	١	١٫٣٣
م	م٣ صفر	٠و٦٧	١و٣٣	٠و٦٧	صفر	-١	-٠٫٦٧	صفر	١و٦٧
	اختبار المثالية								
	ا ت ٦	٤٠ - م	٢٠+٣م	-٢٠+٢م	-م	-م	٢٠م-٢م	م	-٤٠+٣م
	ا ت — و ت —	— م	٦٠+٣م	-٢٠+٢م	-م	-م	٢٠ - ٣م	—	—

وبالنظر للجدول السابق نلاحظ أن .

(١) صف (ا ت — د ت) به بعض القيم الموجبة ومعنى هذا أن الجدول المذكور لايعتبر الجدول الأمثل ولابد أن ننقل إلى جدول آخر أفضل منه .

(٢) العمود الرئيسى هو عمود ص٣ حيث أن عنصر صف (ا ت ـ د ت) به هو أكبر قيمة موجبة (ـ ٦٠ + ٣ م) .

(٣) بحساب قيمة § ثيتا نجد أن الصف الرئيسى هو صف م٢ حيث أن قيمة § ثيتا هى أصغر قيمة موجبة (١٫٣٣ ÷ ١٫٦٧)

(٤) المفتاح هو الرقم (١٫٦٧) تقاطع الصف الرئيسى (م٢) مع العمود الرئيسى (ص٣) .

(٥) نحسب عناصر الصف الرئيسى فى جدول السمبلكس الجديد بقسمة عناصر صف م٢ فى الجدول السابق على الرقم ١٫٦٧ (المفتاح) كما يلى

الصف القديم م٢ صفر ـ ١٫٦٧ ١٫٦٧ ١٫٣٣ ـ ١ صفر ـ ١٫٣٣ ١ صفر ١٫٣٣

الصف الجديد ص٣ صفر — ١ ١ ٨ر — ٦ر — صفر ـ ٨ر ٦ر صفر ٨ر

(٦) نحسب عناصر الصف ص١ فى الجدول الجديد باستخدام المعادلة على النحو التالى :

$$\text{القيمة القديمة} - \frac{\text{الرقم المقابل فى الصف الرئيسى} \times \text{الرقم المقابل فى العمود الرئيسى}}{\text{المفتاح}} = \text{القيمة الجديدة}$$

$$١ \quad - \quad \frac{\text{صفر} \times ٠,٣٣}{١,٦٧} = ١$$

$$٠,٦٧ \quad - \quad \frac{-١,٦٧ \times ٠,٣٣}{١,٦٧} = ١$$

$$٠,٣٣ \quad - \quad \frac{١,٦٧ \times ٠,٣٣}{١,٦٧} = \text{صفر}$$

$$- ٠,٣٣ \quad - \quad \frac{١,٣٣ \times ٠,٣٣}{١,٦٧} = - ٠,٦٠$$

$$\text{صفر} \quad - \quad \frac{-١ \times ٠,٣٣}{١,٦٧} = ٠,٢٠$$

$$\text{صفر} \quad - \quad \frac{\text{صفر} \times ٠,٣٣}{١,٦٧} = \text{صفر}$$

$$٠,٣٣ \quad - \quad \frac{-١,٣٣ \times ٠,٣٣}{١,٦٧} = ٠,٦٠$$

$$\text{صفر} \quad - \quad \frac{١ \times ٠,٣٣}{١,٦٧} = - ٠,٢٠$$

$$\text{صفر} - \frac{\text{صفر} \times ٠,٣٣}{١,٦٧} = \text{صفر}$$

$$٠,٦٧ - \frac{١,٣٣ \times ٠,٣٣}{١,٦٧} = ٠,٤٠$$

(٧) نحسب عناصر الصف م٣ فى الجدول الجديد باستخدام نفس المعادلة على النحو التالى :

$$\text{صفر} - \frac{\text{صفر} \times ١,٣٣}{١,٦٧} = \text{صفر}$$

$$٠,٦٧ - \frac{-١,٦٧ \times ١,٣٣}{١,٦٧} = ٢$$

$$١,٣٣ - \frac{١,٣٣ \times ١,٦٧}{١,٦٧} = \text{صفر}$$

$$٠,٦٧ - \frac{١,٣٣ \times ١,٣٣}{١,٦٧} = -٠,٤٠$$

$$\text{صفر} - \frac{-١ \times ١,٣٣}{١,٦٧} = ٠,٨٠$$

$$-١ - \frac{\text{صفر} \times ١,٣٣}{١,٦٧} = -١$$

$$\text{٠,٤٠} = \frac{\text{١,٣٣} \times \text{١,٣٣}-}{\text{١,٦٧}} - \text{٠,٦٧} -$$

$$\text{٠,٨٠} - = \frac{\text{١,٣٣} \times \text{١}}{\text{١,٦٧}} - \text{صفر}$$

$$\text{١} = \frac{\text{١,٣٣} \times \text{صفر}}{\text{١,٦٧}} - \text{١}$$

$$\text{٠,٦٠} = \frac{\text{١,٣٣} \times \text{١,٣٣}}{\text{١,٦٧}} - \text{١,٦٧}$$

وبذلك يمكن تصوير جـــدول السمبلكس الثالث فى حل هذه المشكلة كما يلى :

ت	ء [ت]	٦٠	٤٠	٨٠	—	—	—	م	م	م	ص.
	الاتجاه الأسامى	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ص٥	ص٦	٣٢	٢٤	١٢	
٦٠	ص١	١	١	صفر	— ٠ر٦٠	٠ر٢٠	صفر	صفر	— ٠ر٢٠	٠ر٦٠	٠ر٤٠
٨٠	ص٣	صفر	— ١	١	٠ر٨	— ٠ر٦	صفر	صفر	٠ر٦٠	— ٠ر٨	٠ر٨٠
م	٣٢	صفر	٢	صفر	— ٠ر٤	٠ر٨	— ١	١	— ٠ر٨	٠ر٤	٠ر٦٠
	اختبار المثالية										
	ات	٦٠	— ٢٠ + ٢م	٨٠	٢٨ — ٤وم	— ٣٦ + ٨وم	— م	م	٣٦ — ٨وم	٢٨ + ٤رم	٨٨ + ٦وم
	(ات — ء ت)	—	— ٦٠ + ٢م	—	٢٨ — ٤وم	— ٣٦ + ٨وم	— م	—	٣٦ — ٨و١م	٢٨ — ٦رم	

وبالنظر للجدول السابق نلاحظ أن :

(١) صف (ات — دت) به بعض القيم الموجبة ومعنى هذا أن الجدول المذكور لا يعتبر الجدول الأمثل ولابد أن ننتقل إلى جدول آخر أفضل منه .

(٢) العمود الرئيسى هو عمود ص٢ حيث أن عنصر صف (ات ـ دت) به هو أكبر قيمة موجبة (ـ ٦٠ + ٢ م) .

(٣) بحساب قيمة § ثيتا نجد أن الصف الرئيسى هو صف م٣ حيث أن قيمة § ثيتا هى أصغر قيمة موجبة (٠٫٦٠ ÷ ٢) .

(٤) المفتاح هو الرقم (٢) تقاطع الصف الرئيسى (م٣) مع العمود الرئيسى (ص٢) .

(٥) نحسب عناصر الصف الرئيسى فى جدول السمبلكس الجديد بقسمة عناصر صف م٣ فى الجدول السابق على الرقم(٢) المفتاح كما يلى:

الصف القديم م٣ صفر ٢ صفر ـ٠٫٤ ٠٫٨ ـ ١ ٠٫٤ ـ٠٫٨ ١ ٠٫٦٠

الصف الجديد ص٢ صفر ١ صفر ـ٠٫٢ ٠٫٤ ـ ٠٫٥ ٢٫٠ ـ ٠٫٤ ٠٫٣

(٦) نحسب عناصر الصف ص١ فى الجدول الجديد باستخدام المعادلة على النحو التالى :

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{الصف الرئيسى} - \frac{\text{الرقم المقابل فى العمود الرئيسى} \times \text{الرقم المقابل فى القيمة القديمة}}{\text{المفتاح}}$$

$$١ - \frac{\text{صفر} \times ١}{٢} = ١$$

$$١ - \frac{٢ \times ١}{٢} = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - \frac{\text{صفر} \times ١}{٢} = \text{صفر}$$

$$-٠٫٦ - \frac{-٠٫٤ \times ١}{٢} = -٠٫٤$$

$$٠٫٢ - \frac{٠٫٨ \times ١}{٢} = -٠٫٢$$

$$\text{صفر} - \frac{-١ \times ١}{٢} = ٠٫٥$$

$$٠٫٦ - \frac{٠٫٤ \times ١}{٢} = ٠٫٤$$

$$-٠٫٢ - \frac{-٠٫٨ \times ١}{٢} = ٠٫٤$$

$$\text{صفر} - \frac{١ \times ١}{٢} = -٠٫٥$$

$$٠ر١ = \frac{١ \times ٠ر٦}{٣} - ٠ر٤$$

(٧) نحسب عناصر الصف ص٢ فى الجدول الجديد باستخدام نفس المعادلة على النحو التالى :

$$\text{صفر} = \frac{\text{صفر} \times (-١)}{٢} - \text{صفر}$$

$$\text{صفر} = \frac{(-١) \times ٢}{٢} - ١$$

$$١ = \frac{\text{صفر} \times (-١)}{٢} - ١$$

$$٠ر٦ = \frac{٢ \times (-٠ر٤)}{٢} - ٠ر٨$$

$$-٠ر٢ = \frac{(-١) \times ٠ر٨}{٢} - (-٠ر٦)$$

$$-٠ر٥ = \frac{(-١) \times (-١)}{٢} - \text{صفر}$$

$$-٠٫٨ - \frac{٠٫٤ \times -١}{٢} = -٠٫٦$$

$$٠٫٦ - \frac{-٠٫٨ \times -١}{٢} = ٠٫٢$$

$$\text{صفر} - \frac{-١ \times ١}{٢} = ٠٫٥$$

$$٠٫٨ - \frac{-١ \times ٠٫٦}{٢} = ١٫١$$

وبذلك يمكن تصوير جدول السمبلكس الرابع فى حل هذه المشكلة كما يلى:

ت	ك (ت)	٦٠	٤٠	٨٠	—	—	—	م	م	م	
	الاتجاه الأساسي	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ص٥	ص٦	١م	٢م	٣م	ص.
٦٠	ص١	١	صفر	صفر	—٤و٠	—٢و٠	٠و	٤و٠	—٢و٠	—٥و٠	١و٠
٨٠	ص٢	صفر	صفر	١	٦و٠	—٢و٠	—٥و٠	—٦و٠	٢و٠	٥و٠	١و١
٤٠	ص٣	صفر	١	صفر	٤و٠	٤و٠	—٥و٠	٢و٠	٤و٠	٥و٠	٣و٠
	اختبار المثالية										
	ات	٦٠	٤٠	٨٠	١٦	—١٢	—٣٠	—١٦	١٢	٣٠	
	(ات ـ وت)	—	—		١٦	—١٢	—٣٠	—١٦	١٢	٣٠	١٠٦
								—م	—م٠	—م	

وبالنظر للجدول السابق نلاحظ أن:

(١) صف (ا ت ـ ء ت) به بعض القيم الموجبة ومعنى هذا أن الجدول المذكور لا يعتبر الجدول الأمثل ولابد أن ننتقل إلى جدول آخر أفضل منه .

(٢) العمود الرئيسى هو عمود (ص٤) حيث أن عنصر صف (ا ت ـ د ت) به هو أكبر قيمة موجبة (١٦) .

(٣) بحساب قيمة θ ثيتا نجد أن الصف الرئيسى هو صف ص٣ حيث أن قيمة θ ثيتا هى أصغر قيمة موجبة (١٫١ ÷ ٠٫٦) .

(٤) المفتاح هو الرقم (٠٫٦) تقاطع الصف الرئيسى (ص٣) مع العمود الرئيسى (ص٤) .

(٥) نحسب عناصر الصف الرئيسى فى جدول السمبلكس الجديد .

بقسمة عناصر صف ص٣ فى الجدول السابق على الرقم ٠٫٦ (والمفتاح) كما يلى :

الصف القديم ص٣ صفر صفر ١ ٠٫٦ ـ٠٫٢ ـ٠٫٥ ـ٠٫٦ ٠٫٢ ٠٫٥ ١٫١

الصف الجديد ص٤ صفر صفر ١٫٦٧ ١ ـ٠٫٣٣ ٠٫٨٣ ـ١ ٠٫٣٣ ٠٫٨٣ ١٫٨٣

(٦) نحسب عناصر الصف ص١ فى الجدول الجديد باستخدام المعادلة على النحو التالى :

$$\text{القيمة القديمة} = \frac{\text{الرقم المقابل فى الصف الرئيسى} \times \text{الرقم المقابل فى العمود الرئيسى}}{\text{المفتاح}} = \text{القيمة الجديدة}$$

$$١ - \frac{\text{صفر} \times - ٤\text{د}}{٦\text{و}} = ١$$

$$\text{صفر} - \frac{\text{صفر} \times - ٤\text{د}٠}{٦\text{د}} = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} - \frac{١ \times - ٤\text{د}}{٦\text{د}} = ٦٧\text{د}٠$$

$$- ٤\text{د}٠ - \frac{٦\text{د}٠ \times - ٤\text{د}٠}{٦\text{د}} = \text{صفر}$$

$$- ٢\text{و}٠ - \frac{- ٢\text{د}٠ \times - ٤\text{د}٠}{٦\text{و}٠} = - ٣٣\text{د}٠$$

$$٥\text{د}٠ - \frac{- ٥\text{د}٠ \times - ٤\text{د}٠}{٩٦\text{و}٠} = ١٧\text{د}٠$$

$$٤\text{و}٠ - \frac{- ٦\text{د}٠ \times - ٤\text{د}٠}{٦\text{د}٠} = \text{صفر}$$

$$٢\text{د}٠ - \frac{٢\text{و}٠ \times - ٤\text{و}٠}{٦\text{د}٠} = ٣٣\text{د}٠$$

$$-٠٫٥ - \frac{٠٫٤ - \times ٠٫٥}{٠٫٦} = -٠٫١٧$$

$$١ - \frac{٠٫٤ - \times ١٫١}{٠٫٦} = ٠٫٨٣$$

(٧) نحسب عناصر الصف ص٢ فى الجدول الجديد باستخدام نفس المعادلة كما يلى :

$$\text{صفر} - \frac{\text{صفر} \times ٠٫٢ -}{٠٫٦} = \text{صفر}$$

$$١ - \frac{\text{صفر} \times ٠٫٢ -}{٠٫٦} = ١$$

$$\text{صفر} - \frac{١ \times ٠٫٢ -}{٠٫٦} = ٠٫٣٣$$

$$-٠٫٢ - \frac{٠٫٦ \times ٠٫٢ -}{٠٫٦} = \text{صفر}$$

$$٠٫٤ - \frac{-٠٫٢ \times ٠٫٢ -}{٠٫٦} = ٠٫٣٣$$

$$-٠٫٥ - \frac{-٠٫٥ \times ٠٫٢ -}{٠٫٦} = ٠٫٦٧$$

$$٢و٠ - \frac{-٦ر٠ \times -٢ر٠}{٠و٦} = \text{صفر}$$

$$-٤ر٠ - \frac{٢ر٠ \times -٢ر٠}{٠ر٦} = ٣٣ر٠$$

$$٥ر٠ - \frac{٥ر٠ \times -٢ر٠}{٠ر٦} = ٦٧ر٠$$

$$٣ر٠ - \frac{١ر١ \times -٢ر٠}{٠ر٦} = ٦٧ر٠$$

وبذلك يمكن تصوير جدول السمبلكس فى حل هذه المشكلة على النحو التالى :

ت	د ت	٦٠	٤٠	٨٠	—	—	—	م	م	م	
	الاتجاه الأساسى	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ص٥	ص	١م	٢م	٣م	ص.
٦٠	ص١	١	صفر	٠و٦٧	صفر	—٠و٣٣	—٠و١٧	صفر	٠و٣٣	—٠و١٧	٠و٨٣
صفر	ص٤	صفر	صفر	١و٦٧	١	—٠و٣٣	—٠و٨٣	—١	٠و٣٣	٠و٨٣	١و٨٣
٤٠	ص٢	صفر	١	٠و٣٣	صفر	٠و٣٣	—٠و٦٧	صفر	٠و٣٣	٠و٦٧	٠و٦٧
	اختبار المثالية										
	ات	٦٠	٤٠	٥٣	صفر	— ٧	— ١٧	صفر	٧	١٧	٧٦و٦٧
	(ات — ءت)	—	—	—٢٧	صفر	— ٧	— ١٧	— م	٧ — م	١٧ — م	

يلاحظ بالجدول السابق أن صف (ات — ءت) ليس به أى قيمة وبذلك يكون هو الجدول الأمثل . ويكون الحل الأمثل للمشكلة على النحو التالى :

ص١ = ٠,٨٣

ص٢ = ٠,٦٧

ص٣ = صفر

ص٤ = ١,٨٣

ص٥ = صفر

ص٦ = صفر

إجمالى المساحة فى خفض التكلفة = ٧٦ ٢/٣ .

ويلاحظ أن هذا الناتج هو نفس الناتج فى النموذج الأصلى الخاص بتضخيم الأرباح حيث بلغ ٧٦ ٢/٣ .

الفصل الثالث

من الباب الثالث

طرائق خاصة فى البرامج الخطية

SPECIAL METHODS OF LINEAR PROGRAMMING

أتممنا فى الفصل السابق الطريقة العامة لحل المشاكل بأسلوب البرامج الخطية ونعود الآن إلى طرق خاصة لايمكن استخدامها فى حل كافة المشاكل بل يقتصر استخدامها فى مشاكل خاصة يتوافر فيها الشروط الآتية :

١ — مجموع الموارد مساوى لمجموع الطلبات كما هو الحال فى مشاكل النقل.

٢ — جميع معاملات المتغيرات المتبادلة أما صفر أو واحد صحيح كما هو الحال فى مشاكل التعيين. وتقدم هذه الطرق أسلوباً خاصاً لتسهيل الحل. ورغم أنه من الممكن حل هذه المشاكل باستخدام طريقة السمبلكس إلا أنه يفضل عادة أستخدام هذه الأساليب الخاصة لسهولتها وتمشيها مع طبيعة هذه المشاكل الخاصة.

وأهم الطرق الحديثة المستخدمة هى طريقة النقل Transportation وطريقة التعيين Aesignment Method ولضيق المجال سنكتفى بشرح الطريقة الأولى حيث أنها أكثر إنتشاراً.

طريقة النقل Transportation Methods

طريقة النقل هى أسلوب مبسط يستخدم لحل مشاكل البرامج الخطية المتعلقة بالتوزيع بين المصانع والمخازن وبين المخازن ومناطق التوزيع بغرض تقليل نفقات

النقل إلى أدنى حد ممكن . ويلاحظ فى هذا النوع من المشاكل تساوى مجموع الكميات المطلوب توزيعها مع مجموع الكميات المطلوبة .

ويتكون تركيب المشكلة بنفس الأسلوب السابق من :

١ — تحديد للهدف وهو تخفيض التكاليف إلى الحد الأدنى :

٢ — إمكانيات محدودة تحد من استخدام البدائل المختلفة ويمكن تمثيلها فى شكل متباينات حيث تتحدد إمكانية كل مصنع للانتاج وإمكانية كل مخزن للتوزيع وإمكانية كل منطقة توزيع للبيع

٣ — وكذلك لابد من توافر شروط عدم السلبية حيث لا يعقل أن يتم توزيع كميات سالبة . وتتحدد تكاليف النقل بحسب المناطق المختلفة والمسافات بين كل نقطتين مختلفتين كما يؤخذ فى الاعتبار أيضاً اختلاف تكاليف الإنتاج للوحدة فى كل مصنع نتيجة إختلاف أسعار المواد ومعدلات الأجور. ولكن يشترط فى استخدام هذه الطريقة توحيد أسعار النقل للوحدة عند نقلها من مركزها إلى نقطة معينة مع فرض تجانس جميع الوحدات المنتجة .

وكما ذكرنا من قبل كشرط عام لاستخدام أسلوب البرامج الخطية فى حل المشاكل قابليتها للتمثيل الرياضى والقياسى الكمى . ولذلك تمثل مشاكل النقل رياضياً كالآتى :

أولا ت اب : تكاليف نقل وحدة من الإنتاج من نقطة ا إلى نقطة ب

س اب : عدد الوحدات المطلوب نقلها من نقطة ا إلى نقطة ب .

ت اب. س اب: مجموع تكاليف نقل س اب وحدة من المنتج من النقطة ا إلى نقطة ب وتحسب بضرب متجه (أو صف)عدد

الوحدات المطلوبة نقلها فى مقعه (أو عمود) تكلفة نقل الوحدات من النقطة ا إلى النقطة ب .

مجـ ا مجموع عدد الوحدات المطلوبة نقلها من نقطة الأصل أو البداية .

مجـ ب مجموع عدد الوحدات المطلوب نقلها إلى نقطة النهاية .

وبذلك يكون الهدف المنشود ء (ت) هو تخفيض مجموع تكاليف النقل للوحدات المختلفة أى تخفيض مجـ س ا ب . تاب

ثانياً : العوامل والقيود المحددة وتتلخص فى :

مجـ س ا ب ≤ مجـ ا مجموع عدد الوحدات المطلوب نقلها من المصانع (ا) إلى المخازن (ب) لاتزيد عن عدد الوحدات الموجودة فى ا والمطلوب نقلها من المصانع المذكورة . (قيود العرض المحددة) .

مجـ س اب ≤ مجـ ب مجموع عدد الوحدات المطلوب نقلها من (ا) إلى (ب) لاتزيد عن عدد الوحدات المطلوب نقلها إلى المخازن المذكورة . (قيود الطلب المحددة) .

ثالثاً : شروط عدم السلبية وهى س ا ب ≥ صفر .

ويمكن شرح خطوات الحل بطريقة النقل بمتابعة حل المثال العملى الثالى :

مثال ٦/٣ :

تملك إحدى الشركات ٣ مصانع ا ، ب ، ح و ٣ مخازن للتوزيع س ،

ص ، ع . فإذا كانت المصانع الثلاثة وتنتج وحدات متماثلة تماما من منتج واحد بيانها كالآتى :

مصنع ا١ : ٤٠٠ وحدة

مصنع ا٢ : ٥٠٠ وحدة

مصنع ا٣ : ٣٠٠ وحدة

وإذا كانت الكميات التى تحتاج إليها مخازن التوزيع كالآتى :

مخزن ب١ : ٢٠٠ وحدة

مخزن ب٢ : ٧٠٠ وحدة

مخزن ب٣ : ٣٠٠ وحدة

وإذا كانت أسعار وتكاليف النقل للوحدة من المصانع للمخازن كالتالى:

من المصنع ا١ الى المخزن ب١ ١٢٠ قرشا

ب٢ ١٥٠

ب٣ ٤٠

من المصنع ا٨ الى المخزن ب١ ١٠٠

ب٢ ٨٠

ب٣ ٥٠

من المصنع ا٥ إلى المخزن ب١ ٥٠

ب٢ ٢٠

ب٣ ١٠٠

والمطلوب بيان أحسن توزيع يمكن أرساله من المصانع إلى المخازن المختلفة بحيث تخفض تكاليف النقل إلى الحد الأدنى .

ولحل المشكلة تتبع خطوات أسلوب البرامج الخطية السابق عرضها فى الفصل السابق كالآتى :

١ — الهدف المنشود ء (ت) = تخفيض مج س اب. ت اب .

حيث ترمزت للتكاليف .

ت اب تكلفة النقل من مصنع ا إلى مخزن ب .

س اب عدد الوحدات المنقولة من مصنع ا إلى مخزن ب.

٢ — القيود المحددة :

مج ا١ ≤ ٤٠٠

مج ا٢ ≤ ٦٠٠

مج ا٣ ≥ ٢٠٠

مج ب١ ≥ ٢٠٠

مج ب٢ ≤ ٧٠٠

مج ب٣ ≤ ٣٠٠

٣ — شرط عدم السلبية: جميع المتغيرات ≥ صفر .

وتتركز طريقة النقل على نفس الخطوات التى تتركز حولها طريقة السمبلكس وهى :

١ — إيجاد أول حل بدائى ممكن.

٢ — أختبار المثالية وقبول الحل البدائى أو البحث عن حل أفضل.

٣ — تكرار الخطوات حتى نصل إلى الحل الأمثل.

وتختلف الجداول المستخدمة فى طريقة السمبلكس عن هذه الجداول نظراً لاختلاف طبيعة المشاكل التى تحل بطريقة النقل وإختلافها عن المشاكل الأخرى ويمكن تصوير هذه الجداول كالآتى :

من ← إلى ↓	ا١	ا٢	ا٣	مجموع
ب١	١٢٠ ا١ ب١	١٠٠ ا٢ ب١	٥٠ ا٣ ب١	٢٠٠
ب٢	١٥٠ ا١ ب٢	٨٠ ا٢ ب٢	٢٠ ا٣ ب٢	٧٠٠
ب٣	٤٠ ا١ ب٣	٥٠ ا٢ ب٣	١٠٠ ا٣ ب٣	٣٠٠
مجموع	٤٠٠	٦٠٠	٢٠٠	١٢٠٠

ويمكن تفسير مفردات الجدول كالآتى :

١ — تخصص المربعات الصغيرة لكتابة تكلفة نقل الوحدة من المصنع إلى المخزون .

٢ — تسمى المربعات الكبيرة بالخلايا وتميز بتقاطع الصفوف مع الأعمدة الممثلة لها .

٣ — تتساوى مجموع الوحدات المنتجة بالمصانع الثلاثة مع مجموع الوحدات المطلوبة للمخازن الثلاثة .

أولا : تكملة أول حل بدائى ممكن.

يتم عمل أول حل بدائى ممكن بعدة طرق مختلفة أهمها طريقة الركن الشمالى الشرقى .

(وتعتبر فى اللغة الأنجليزية طريقة الركن الشمالى الغربى Northwest Corner حيث أن الكتابة فى اللغة الإنجليزية تبدأ من الشمال (الغرب) إلى اليمين (الشرق) بعكس اللغة العربية) .

١ — وتنص هذه الطريقة على أن نبدأ بالخلية الأولى فى الصف الأعلى (الشمالى) والعمود الأول (الشرقى) حيث الخلية ا١ ب١ ونضع بها أكبر مقدار يمكن ارساله من مصنع ا١ الى مخزن ب١ وتتحدد هذه الكمية بمقدار انتاج مصنع ا١ أو بالكمية المطلوبة فى مخزن ب١ أيهما أقل . وفى هذا المثال تتحدد الكمية بمقدار ٢٠٠ وحـــدة وهى أقصى كمية يمكن للمخزن ب١ توزيعها .

٢ — أما الكمية الباقية بمصنع ا١ فترسل الى مخزن ب٢ فى حدود امكانياته فى التوزيع . وبما أن الكمية الباقية بالمصنع ا١ تساوى ٢٠٠ وحدة

وامكانية مخزن ب٢ فى التوزيع تعادل ٧٠٠ وحدة تملأ الخلية ا٢ ب٢ بمقدار ٢٠٠ وحدة . ويكون بذلك أنتهينا من العمود ا١ أى انتاج المصنع ا١ حيث أرسل ٢٠٠ وحدة الى ب١ و ٢٠٠ وحدة الى ب٢ ولا شيء الى ب٣ .

٣ — تستكمل المطلوب للمخزن ب٢ من انتاج المصنع ا٢ فى حدود انتاج المصنع ا٢ أو باقى المطلوب للمخزون ب٢ أيهما أقل . وفى هذا المثال تملأ الخلية ا٢ ب٢ بمقدار ٥٠٠ وحدة وهى أقصى ما يمكن ارساله الى مخزن ب٢. ويرسل باقى انتاج المصنع ا٢ (وقدره ١٠٠ وحدة الى مخزن ب٣) .

وخلاصة ذلك أن انتاج مصنع ا٢ سيرسل منه ٥٠٠ وحدة الى المخزن ب٢ ، ١٠٠ وحدة الى مخزن ب٣ .

٤ — يرسل انتاج المصنع ا٢ الى مخزن ب٣ وقدره ٢٠٠ .

وبذلك يمكن تصوير أول حل بدائى ممكن فى الجدول الآتى :

من ← إلى ↓	أ١	أ٢	أ٣	مجموع
ب١	٢٠٠ ١٢٠	× ١٠٠	٢٠٠ ١٥٠	٢٠٠
ب٢	٢٠٠ ١٥٠	٥٠٠ ٨٠	× ٢٠	٧٠٠
ب٣	× ٤٠	١٠٠ ٥٠	٢٠٠ ١٠٠	٣٠٠
مجموع	٤٠٠	٦٠٠	٢٠٠	١٢٠٠

٥ — تحسب مجموع تكاليف النقل كالآتى = مج س ا ب . ت ا ب

= مجموع حاصل ضرب الوحدات المنقولة من كل مصنع إلى كل مخزن فى تكاليف نقل الوحدة من المصنع المذكور إلى المخزن المعين .

= س ا ١ ب ١ . ت ا ١ ب ١ + س ا ١ ب ٢ . ت ا ١ ب ٢ + س ا ٢ ب ٢ .

ت ا ٢ ب ٢ + س ا ٢ ب ٣ . ت ا ٢ ب ٣ + س ا ٣ ب ٣ . ت ا ٣ ب ٣

= ٢٠٠ × ١٢٠ + ١٥٠ × ٢٠٠ + ٨٠ × ٥٠٠ + ٥٠ × ١٠٠ +

٢٠٠ × ١٠٠ = ١١٩٠٠٠ قرشا = ١١٩٠ جنيها .

يلاحظ أن جميع الخلايا الفارغة اعتبرت صفرا ولم تؤخذ فى الاعتبار عند حساب مجموع تكاليف النقل .

ثانيا : اختبار المثالية

وبعد أن يتم عمل أول حل بدائى يمكن تختبر مثالية الحل لمعرفة هل من الممكن تخفيض التكاليف عن ذلك أم لا . ولكى يتم ذلك تستخدم عدة طرق أهمها طريقة حجر الوطء Stepping-Stone Method

وتتلخص هذه الطريقة فيما يلى :

١ - تقيم جميع الخلايا الفارغة لمعرفة أثر استخدام هذه الخلايا الفارغة بدلا من الخلايا الأخرى المستخدمة فى الحل الحالى . وحتى يتم التقييم لجميع الخلايا على أساس سليم نبحث عن أثر ملء هذه الخلايا المجاورة بحيث ترسم خط سير ذو أركان عمودية يمثل كل ركن منها من الخلايا المليئة وينتهى خط المذكور بالخلية الفارغة المطلوب تقييمها .

وبما أن الأرقام المذكورة بالخلايا مقيدة بمجاميع الصفوف والأعمدة فان الوحدة التى تضاف فى خلية يجب أن تخصم من خلية أخرى فى نفس الصف وخلية أخرى ب فى نفس العمود أيضا حتى لا يختل توازن مجاميع الأعمدة والصفوف ويلاحظ أنه بنقل أى وحدة من خلية إلى أخرى ستنخفض التكاليف بتكلفة الوحدة المنقولة من هذه الخلية وتزداد التكاليف بتكلفة الوحدة المنقولة إلى الخلية الأولى .

فمثلا لتقييم الخلية ا٢ ب١ نرسم خط سير وحدة يبدأ من الخلية ا١ ب١ إلى الخلية ا٢ ب١ ولكنه سيزيد مجموع العمود ا٢ ويقلل من مجموع العمود ا١ ولذلك يجب أن تنتقل وحدة أخرى من الخلية ا٢ ب٢ إلى الخلية ا١ ب٢ ليتم توازن مجاميع الأعمدة والصفوف .

ولذلك يرسم خط السير كالآتى من ا٢ ب٢ إلى ا١ ب٢ ومن ا١ ب١ إلى ا٢ ب١ ويترتب ذلك التغير التالى فى التكاليف — ت ا٢ ب٢ + ت ا١ ب٢ — ت ا١ ب١ + ت ا٢ ب١

فاذا كانت نتيجة التغير فى التكاليف موجبا كانت عملية نقل الوحدة إلى الخلية الفارغة إجراء غير ناجح وستؤدى إلى زيادة التكاليف بينما إذا كان نتيجة تغير التكاليف سالبا كانت عملية النقل إلى الخلية الفارغة إجراء ناجح يؤدى الى تقليل التكاليف.

٢ — يجب أن يمر خط السير بخلايا مليئة حيث يمكن نقل وحدات منها . وفى بعض الحالات يمكن أن يعبر خط السير خلية واحدة مليئة دون أن يمر بها حتى يستطيع أن يكمل خط السير . كما يجب أن يكون خط السير دائما فى خطوط أفقية أو رأسية يمكن تطبيق ماسبق على الجدول السابق فيما يل .

قيمة الخلية الفارغة = أثر نقل وحدة لهذه الخلية على التكاليف طبقاً لخط السير .

الخلية (ا٢ ب١)

خط السير من ا٢ ب٢ الى ا١ ب٢ ومن ا١ ب١ الى ا٢ ب١

الأثر على التكاليف = — ا٢ ب٢ + ا١ ب٢ — ا١ ب١ + ا٢ ب١

= — ٨٠ + ١٢٠ — ١٥٠ + ١٠٠ = + ٥٠ قرشاً

أى أن نقل أى وحدة الى الخلية ا٢ ب١ طبقاً لخط السير الموضح بعاليه سيترتب عليه زيادة فى تكاليف النقل بمقدار ٥٠ قرشاً لكل وحدة ؛ وهذا فى غير صالح الشركة .

الخلية (ا٣ ب ١)

خط السير : من ا٣ ب٣ الى ا٢ ب٣ ، ومن ا٢ ب٢ الى ا١ ب٢ .من ا١ ب١ الى ا٣ ب١ .

الأثر على التكاليف = ـ ا٣ ب٣ + ا٢ ب٣ ـ ا٢ ب٢ + ا١ ب٢ ـ ا١ ب١ + ا٣ ب١

= ـ ١٠٠ + ٥٠ ـ ٨٠ + ١٥٠ — ١٢٠ + ٥٠

= — = ٥٠ قرشاً

أى نقل أى وحدة الى الخلية ا٣ ب٣ طبقاً لخط السير الموضح بعاليه سيترتب عليه تخفيض فى تكاليف النقل بمقدار ٥٠ قرشاً لكل وحدة منقولة ؛ وهذا فى صالح الشركة .

الخلية (ا٣ ب٢)

خط السير من ا٣ ب٣ الى ا٢ ب٣ ، ومن ا٢ ب٢ الى ا٣ ب٢

الأثر على التكاليف = ـ ا٣ ب٣ + ا٢ ب٣ ـ ا٢ ب٢ + ا٣ ب٢

= ـ ١٠٠ + ٥٠ ـ ٨٠ + ٢٠ = — = ١١٠ قرشاً

أى أن نقل أى وحدة الى الخلية ا٣ ب٢ طبقاً لخط السير الموضح بعاليه سيترتب عليه تخفيض فى تكاليف النقل بمقدار ١١٠ قرشا لكل وحدة منقولة وهذا فى صالح الشركة .

الخلية (ا١ ب٣)

خط السير : من ا٢ ب٣ الى ا٢ ب٢ ، من ا١ ب٢ الى ا١ ب٣

الأثر على التكاليف : ـ ا٢ ب٣ + ا٢ ب٢ ـ ا١ ب٢ × ا١ ب٣

= — = ٥٠ + ١٥٠ ـ ٨٠ = ٤٠ = ـ ٨٠ قرشا

أى أن نقل أى وحدة الى الخلية ا١ ب٣ طبقا لخط السير الموضح بماليه سيترتب عليه تخفيض فى تكاليف النقل بمقدار ٨٠ قرشا لكل وحدة منقولة وهذا فى صالح الشركة .

مما سبق يتبين أن الجدول الحالى ليس هو الحل الأمثل ويمكن تخفيض التكاليف اذا نقلنا أكثر ما يمكن من الوحدات الى الخلية ا٣ ب١ (تخفيض ٥٠ قرش لكل وحدة) أو الخلية ا٣ ب٢ (تخفيض ١١٠ قرش لكل وحدة) أو الخليه ا١ ب٣ (تخفيض ٨٠قرش لكل وحدة). ولما كنا نسعى الى تخفيض التكاليف الى أدنى حد ممكن فاننا نركز جهودنا نحو الخاية التى تحقق أكبر تخفيض ممكن وننقل لها أكبر كمية ممكنة . وتتحدد أكبر كمية يمكن نقلها بأقل مقدار موجود فى خلية من الخلايا التى ستنقل منها وهى الخلايا التى خصمت تكاليف نقل الوحدة فى خط السير المرسوم لذلك فبالنسبة للخاية ا٣ ب٢ : إذا نظرنا فى الجدول نجد أن عدد الوحدات فى الخلية ا٣ ب٢ (نفس العمود) يبلغ ٢٠٠ وحدة وعدد الوحدات ا٢ ب٢ (نفس الصف) يبلغ ٥٠٠ وحدة وبذلك يتحدد أكبر مقدار يمكن نقله إلى الخليةا٣ ب٢ هو ٢٠٠ وحدة فقط . ويلاحظ أن عدد الوحدات الموجود فى ا٢ ب٢ وقدره ١٠٠ وحدة لم يؤثر على الرقم الذى سينقل إلى الخلية ا٣ ب٢ حيث أنه سوف لاينقل أى وحدات من الخلية ا٢ ب٢ بل على العكس سينقل إليها وذلك لن يؤثر المقدار الموجود بها على الحل .

ويلاحظ أيضاً أنه بعد نقل ٢٠٠ وحدة إلى الخلية ا٣ ب٢ سينخفض التكاليف بمقدار ٢٢٠ جنيهاً (٢٠٠ وحدة × ١١٠ قرش) .

ثالثاً : ايجاد حل أفضل من الحل الحالى :

وبناء على اختبار المثالية السابق ونقل ٢٠٠ وحدة الى الخلية ا٣ ب٢ تبعاً لخط السير المرسوم بياليه يمكن تحديد المقـــادير الجديدة للخلايا المذكورة كالآتى:

الخلية ا٣ ب٣ = ٢٠٠ — ٢٠٠ = صفر

الخلية ا٢ ب٣ = ١٠٠ + ٢٠٠ = ٣٠٠

الخلية ا٢ ب٢ = ٥٠٠ — ٢٠٠ = ٣٠٠

الخلية ا٣ ب٢ = صفر + ٢٠٠ = ٢٠٠

ويمكن بعد ذلك تصوير الجدول الثانى الذى يبين حل ممكن آخر ولكنه أفضل من الحل الأول .

من ← إلى ↓	ا١	ا٢	ا٣	مجموع
ب١	١٢٠ ٢٠٠	١٠٠	٥٠	٢٠٠
ب٢	١٥٠ ٢٠٠	٨٠ ٣٠٠	٢٠ ٢٠٠	٧٠٠
ب٣	٤٠	٥٠ ٣٠٠	١٠٠ —	٣٠٠
مجموع	٤٠٠	٦٠٠	٢٠٠	١٢٠٠

مجموع تكاليف النقل = التكاليف السابقة (طبقا للجدول الأول)

مقدار التوافير نتيجة للتغير السابق .

= ١١٩٠١ — ٢٢٠ = ٩٧٠ ج

ويمكن حسابها بالقانون السابق = مج س ا ب ت ا ب

= ٢٠٠ × ١٢٠ + ٢٠٠ × ١٥٠ + ٣٠٠ × ٨٠ + ٢٠٠ × ٢٠
+ ٣٠٠ × ٥٠ = ٩٧٠٠٠ قرشاً = ٩٧٠ جنيه

رابعاً : اختيار مثالية الجدول الثانى .

وبنفس الطريقة السابقة (طريقة حجر الوطاء (يمكن تقييم الخلايا الفارغة فى الجدول الثانى لمعرفة عما اذا كان من الممكن تخفيض التكاليف عن ذلك .

الخلية (ا٢ ب١)

خط السير : من ا٢ ب٢ الى ا١ ب٢ ، من ا١ ب١ ، الى ا٢ ب١

تغيير التكاليف = - ٨٠ + ١٥٠ - ١٢٠ + ١٠٠ = ٥٠ قرشاً

الخلية (ا٣ ب١)

خط السير : من ا٣ ب٢ الى ا١ ب٢ ، من ا١ ب١ الى ا٣ ب١

تغير التكاليف = - ٢٠ + ١٥٠ - ١٢٠ + ٥٠ = ٦٠ قرشاً

الخلية (ا٣ ب٣)

خط السير : من ا٢ ب٣ الى ا٢ ب٢ ، من ا٣ ب٢ الى ا٣ ب٣

تغير التكاليف = - ٥٠ + ٨٠ - ٢٠ + ١٠٠ = ١١٠ قرشاً

الخلية (ا١ ب٣)

خط السير : من ا١ ب٣ الى ا٢ ب٢ ، من ا١ ب٢ الى ا١ ب٣

تغير التكاليف = - ٥٠ + ٨٠ - ١٥٠ + ٤٠ = - ٨٠ قرش

مما سبق يتبين أنه يمكن تخفيض التكاليف عما سبق اذا نقلنا أكبر عدد ممكن من الوحدات الى الخلية ا١ ب٣ طبقاً لخط السير المرسوم بعاليه حيث يمكننا توفير ثمانون قرشاً عن كل وحدة منقولة ، ولما كان عدد الوحدات فى الخلايا المجاورة (ا١ ب٣ = ٢٠٠ ، ا٢ ب٢ = ٣٠٠) كان أكبر عدد من الوحدات يمكن نقله الى الخلية ا١ ب٢ يبلغ ٢٠٠ وحده فقط ويتحقق بذلك توفير فى التكاليف قدره ١٦٠ ج (٢٠٠ وحده × ٨٠ قرش) :

خامساً : الجدول الثالث (أفضل من الجدول الثانى)

وبناء على اختبار المثالية السابق و نقل ٢٠٠ وحدة إلى الخلية ا ١ ب٣ تبعا لخط السير المرسوم بعاليه . ويمكن تحديد المقادير الجديدة للخلايا المذكورة كما يلى

الخلية ا٢ب٣ = ٣٠٠ - ٢٠٠ = ١٠٠ وحدة

الخلية ا٢ ب ٢ = ٣٠٠ + ٢٠٠ = ٥٠٠

الخلية ا١ب٢ = ٢٠٠ — ٢٠٠ = صفر

الخلية ا١ ب ٣ = صفر + ٢٠٠ = ٢٠٠

ويمكن بعد ذلك تصوير الجدول الثالث الذى يبين حل آخر ممكن وأفضل من الحل الثانى

من ← إلى	ا١	ا٢	ا٣	مجموع
ب١	١٢٠ ٢٠٠	١٠٠	٥٠	٢٠٠
ب٢	١٥٠	٨٠ ٥٠٠	٢٠ ٢٠٠	٧٠٠
ب٣	٤٠ ٢٠٠	٥٠ ١٠٠	١٠٠	٣٠٠
مجموع	٤٠٠	٦٠٠	٢٠٠	١٢٠٠

مجموع تكاليف النقل = التكاليف السابقة (للجدول الثانى) ـ مقدار التوفير نتيجة التغير السابق

= ٩٧٠ — ١٦٠ = ٨١٠ ج

ويمكن حسابها أيضاً بالقانون السابق مجـ س ب ـ ث ا ب

= ٢٠٠ × ١٢٠ + ٥٠٠ × ٨٠ + ٢٠٠ × ٢٠ + ٢٠٠ × ٤٠ + ١٠٠ × ٥٠

= ٨١٠٠٠ قرش

= ٨١٠ جنيه

سادساً : اختبار مثالية الجدول الثالث :

وتتتبع نفس الطريقة السابقة لتقييم الخلايا الفارغة كالآتى :

الخلية (ا٢ ب ١)

خطط السير = من ا٢ب٣ إلى ا ١ ب ٣ ، من ا١ب١ إلى ا٢ب١

تغير التكاليف = — ٥٠ + ٤٠ — ١٢٠ + ١٠٠ = ـ٣٠ قرش

الخلية (ا ٣ ب ١)

خط السير = من ا ٣ ب٢ إلى ا٢ب٢ ، من ا١ب٢ إلى ا٢ب٣، من ا١ب١ إلى ا ٣ ب ١

تغير التكاليف = ـ ٢٠ + ٨٠ — ٥٠ + ٤٠ — ١٢٠ + ٥٠

= ـ ٢٠ قرش

الخلية (ا ١ ب ٢)

خط السير = من ا ٢ب٢ إلى ا ٢ب٣ ، من ا ١ب٣ إلى ا١ب٢

تغير التكاليف = - ٨٠ + ٥٠ - ٤٠ + ١٥٠ = ٨٠

الخلية (ا٣ ب٣)

خط السير = من ا٣ب٣ الى ا٢ب٢ ، من ا٣ ب٢ إلى ا٣ب٣

تغير التكاليف = - ٥٠ + ٨٠ - ٢٠ + ١٠٠ = ١١٠

مما سبق يتبين أنه يمكن تخفيض التكاليف عما سبق إذا نقلنا أكبر عدد ممكن من الوحدات إلى الخلية ا٢ب١ طبقا لخط السير المرسوم بعاليه حيث يتوفر لنا ثلاثون قرشا عن كل وحدة منقولة أو إلى الخلية ا٣ب١ طبقا لخط السير المرسوم بعاليه حيث يتوفر لنا عشرون قرش عن كل وحدة منقولة. ولذلك سنركز جهودنا فى تحويل أكبر عدد ممكن من الوحدات إلى الخلية ا٢ ب١ حيث يتوفر لنا أكثر من الخلية ا٣ب١ . ولما كان عدد الوحدات بالخلية ا٢ ب٢ (نفس العمود) ١٠٠ وحدة ، وبالخلية ا١ ب١ (نفس الصف) ٢٠٠ وحدة فإن أكبر عدد من الوحدات يمكن نقله إلى الخلية ا٢ ب١ هو ١٠٠ وحدة فقط ويتحقق بذلك توفير فى التكاليف قدره ٣٠ ج (١٠٠ وحدة × ٣٠ قرش)

سابعاً : الجدول الرابع (أفضل من الجدول الثالث)

بناء على اختبار المثالية السابق ونقل ١٠٠ وحدة إلى الخلية ا٢ ب١ تبعا لخط السير المرسوم بعاليه يمكن تحديد المقادير الجديدة للخلايا المذكورة كما يلى :

الخلية ا٢ ب٣ = ١٠٠ — ١٠٠ = صفر

الخلية ا١ ب٣ = ٢٠٠ + ١٠٠ = ٣٠٠

الخلية ا١ ب١ = ٢٠٠ — ١٠٠ = ١٠٠

الخلية ا٢ب١ = صفر + ١٠٠ = ١٠

ويمكن بعد ذلك تصوير الجدول الرابع الذى يبين حل آخر ممكن وأفضل من الحل الثالث.

من ← إلى ↓	ا١	ا٢	ا٣	مجموع
ب١	١٢٠ ١٠٠	١٠٠ ١٠٠	٥٠	٢٠٠
ب٢	١٥٠	٨٠ ٥٠٠	٢٠ ٢٠٠	٧٠٠
ب٣	٤٠ ٣٠٠	٥٠	١٠٠	٣٠٠
مجموع	٤٠٠	٦٠٠	٢٠٠	١٢٠٠

مجموع تكاليف النقل = التكاليف السابقة (طبقاً للجدول الثالث) — مقدار التوفير نتيجة التغير السابق

= ٨١٠ — ٣٠ = ٧٨٠ ج

ويمكن أيضاً تطبيق القانون السابق = س ا ب . ت ا ب

= ١٠٠ × ١٢٠ + ١٠٠ × ١٠٠ + ٨٠ × ٥٠٠

٧٨٠٠٠ قرش = ٤٠ × ٣٠٠ + ٢٠ × ٢٠٠

= ٧٨٠ جنيها

ثامناً : اختبار مثالية الجدول الرابع :

وتتبع نفس الطريقة السابقة لتقييم الخلايا الفارغة كالآتى:

الخلية (ا٣ ب١)

خط السير = من ا٣ ب٢ إلى ا٢ ب٢ ، من ا٢ ب١ إلى ا٣ ب١

تغير التكاليف = — ٢٠ + ٨٠ - ١٠٠ + ٥٠ = ١٠

الخلية (ا١ ب٢)

خط السير = من ا٢ ب٢ إلى ا٢ ب١ ، من ا١ ب١ إلى ا١ ب٢

تغير التكاليف = - ٨٠ + ١٠٠ — ١٢٠ + ١٥٠ = ٥٠

الخلية (ا٢ ب٣)

خط السير = من ا١ ب٣ إلى ا١ ب١ ، من ا٢ ب١ إلى ا٢ ب٢

تغير التكاليف = — ٤٠ + ١٢٠ — ١٠٠ + ٥٠ = ٣٠

الخلية (ا٣ ب٣)

خط السير = من ا٣ ب٢ إلى ا٢ ب٢ ، من ا٢ ب١ إلى ا٢ ب١ ، من ا١ ب٣

إلى ا٣ ب٣

تغير التكاليف = - ٢٠ + ٨٠ - ١٠٠ + ١٢٠ - ٤٠ + ١٠٠

= ١٤٠

مما سبق يتبين أنه لن يمكن تخفيض التكاليف عن هذا الجدول بأى حال من الأحوال حيث قيمت جميع الخلايا الفارغة واتضح أنه لن يؤدى استخدامها إلى أى تخفيض فى التكاليف .

ولذلك يمثل الجدول الرابع التوزيع الأمثل ويمكن تلخيصه فيما يلى :

إنتاج المصنع ا١ ٤٠٠ وحدة توزع كالآتى: ١٠٠ وحدة إلى مخزن ب١
٣٠٠ وحدة إلى مخزن ب ٣ .

إنتاج المصنع ا٢ ٦٠٠ وحدة توزع كالآتى : ١٠٠ وحدة الى مخزن ب١
٥٠٠ وحدة الى مخزن ب٢ .

انتاج المصنع ا٣ ٢٠٠ وحدة توزيع كالآتى: ٢٠٠ وحدة (كلها) الى مخزن ب٢ .

مجموع تكاليف النقل (الحد الأدنى) = ٧٨٠ جنيها .

استخدام طريقة النقل فى تضخيم الأرباح

ويمكن استخدام طريقة النقل فى حل مشاكل البرامج الخطية المتعلقة بتضخيم الأرباح لأقصى حد إذا ما توفرت فى المشكلة نفس الخواص التى سبق ذكرها عند عرض طريقة النقل فى تخفيض تكاليف النقل لأدنى حد .

وعند استخدام طريقة النقل فى حل مشاكل تضخيم الأرباح تتكون عناصر المشكلة من نفس العناصر السابق ذكرها فى الطريقة السابقة مع تغيير الهدف المنشود الى تضخيم الأرباح بدلا من تخفيض التكاليف كالآتى :

الهدف المنشود = ى (ر) تضخيم مج س$_{ا ب}$ ر$_{ا ب}$.

ويمكن تطبيق طريقة النقل فى حالة تضخيم الأرباح فى المثال التالى :

مثال ٣/٧ :

مصنع له ثلاث مصانع ا$_{١}$ ، ا$_{٢}$ ، ا$_{٣}$ وثلاثة مراكز توزيع ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ ، ب$_{٣}$

والجدول الاتى يلخص متوسط تكلفة انتاج الوحدة فى كل مصنع ومعدل تكاليف نقل الوحدة من المنتج من نقطة لأخرى علماً بأن جميع وحدات الإنتاج متجانسة ومتماثلة :

المصنع	عدد الوحدات المنتجة	متوسط تكلفة الوحدة	معدل تكاليف نقل الوحدة إلى		
			ب١	ب٢	ب٣
		مليم	مليم	مليم	مليم
ا١	٢٠٠٠	٢٠٠	٦٠	٨٠	٥٠
ا٢	٢٥٠٠	٢٨٠	١٠٠	٣٠	١٠٠
ا٣	١٨٠٠	٣٠٠	٨٠	١٢٠	٧٠

وكانت مجموع الكميات المطلوبة لكل مركز توزيع كالآتى :

ب١ = ١٦٠٠ وحدة ومعدل سعر بيع الوحدة ٤٥٠ مليم

ب٢ = ٢٤٠٠ وحدة ومعدل سعر بيع الوحدة ٤٢٠ مليم

ب٣ = ٢٠٠٠ وحدة ومعدل سعر بيع الوحدة ٤٠٠ مليم

ولحل مثل هذه المشكلة يجب اجراء بعض عمليات تمهيدية أولا . فمن الملاحظ أن الهدف المنشود هو تخفيض التكاليف . ولكن نظراً لأن أسعار البيع مختلفة فى المناطق فقد يكون الأصح للمشروع أن يبيع فى منطقة معينة رغم ارتفاع نفقات النقل ولذلك يمكن تحوير الهدف المنشود الى تضخيم الربح مع مراعاة كل من أسعار البيع وتكاليف الإنتاج وتكاليف النقل . ولحساب معدلات الربح نحسبها أولا بالنسبة لكل مصنع وحسب كل منطقة توزيع . ويمكن استخدام المتجهات والمصفوفات لاختصار الخطوات .

أولا : بالنسبة للمنطقة ب١ : سعر بيع الوحدة ٤٥٠ مليم .

اجمالى التكلفة من المصانع الى المنطقة ب١ = تكاليف الإنتاج بالمصنع + تكاليف النقل الى المنطقة ب١ .

مصنع

إجمـــالى التـكلفة من $\begin{pmatrix} ا \\ ب \\ حـ \end{pmatrix}$ إلى ب١

= تكلفة الإنتاج فى $\begin{pmatrix} ا١ \\ ا٢ \\ ا٣ \end{pmatrix}$ + تكاليف النقل للوحدة من $\begin{pmatrix} ا١ \\ ا٢ \\ ا٣ \end{pmatrix}$ إلى ب١

$$= \begin{pmatrix} ٢٠٠ \\ ٢٨٠ \\ ٣٠٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦٠ \\ ١٠٠ \\ ٨٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٦٠ \\ ٣٨٠ \\ ٣٨٠ \end{pmatrix} \text{ مليم}$$

معدل ربح الوحدة من $\begin{pmatrix} ا١ \\ ا٢ \\ ا٣ \end{pmatrix}$ فى ب١

= سعر بيع الوحدة فى ب١ — إجمالى تـكلفة الوحدة من $\begin{pmatrix} ا١ \\ ا٢ \\ ا٣ \end{pmatrix}$ ومباعة فى ب١

$$= \begin{pmatrix} ٤٥٠ \\ ٤٥٠ \\ ٤٥٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢٦٠ \\ ٣٨٠ \\ ٣٨٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٩٠ \\ ٧٠ \\ ٧٠ \end{pmatrix} \text{ مليم}$$

ثانياً : بالنسبة لمنطقة ب٢ : سعر بيع الوحدة = ٤٢٠ مليم

مصنع

إجمالى التكلفة من $\begin{pmatrix} ا_1 \\ ا_2 \\ ا_3 \end{pmatrix}$ الى ب٢

= تكلفة الإنتاج فى $\begin{pmatrix} ا_1 \\ ا_2 \\ ا_3 \end{pmatrix}$ + تكاليف نقل الوحدة من $\begin{pmatrix} ا_1 \\ ا_2 \\ ا_3 \end{pmatrix}$ الى ب٢

$$= \begin{pmatrix} ٢٠٠ \\ ٢٨٠ \\ ٣٠٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٨٠ \\ ٣٠ \\ ١٢٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٨٠ \\ ٣١٠ \\ ٤٢٠ \end{pmatrix} \text{ مليم}$$

معدل ربح الوحدة من $\begin{pmatrix} ا_1 \\ ا_2 \\ ا_3 \end{pmatrix}$ الى ب٢

= سعر بيع الوحدة فى ب٢ — اجمالى تكلفة الوحدة من $\begin{pmatrix} ا_1 \\ ا_2 \\ ا_3 \end{pmatrix}$ ومباعة فى ب٩

$$= \begin{pmatrix} ٤٢٠ \\ ٤٢٠ \\ ٤٢٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢٨٠ \\ ٣١٠ \\ ٤٢٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٤٠ \\ ١١٠ \\ \text{صفر} \end{pmatrix} \text{ مليم}$$

ثالثاً : بالنسبة المنطقة ب٣ : سعر بيع الوحدة : ٤٠٠ مليم

مصنع

اجمالى تكلفة الوحدة من $\begin{pmatrix} ا_1 \\ ا_2 \\ ا_3 \end{pmatrix}$ الى ب ٣

= تكلفة الإنتاج فى $\begin{pmatrix} ا_1 \\ ا_2 \\ ا_3 \end{pmatrix}$ + تكاليف النقل للوحدة من $\begin{pmatrix} ا_1 \\ ا_2 \\ ا_3 \end{pmatrix}$ الى ب٣

$$= \begin{pmatrix} ٢٠٠ \\ ٢٨٠ \\ ٣٠٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥٠ \\ ١٠٠ \\ ٧٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥٠ \\ ٣٨٠ \\ ٣٧٠ \end{pmatrix} \text{ مليم}$$

معدل ربح الوحدة من $\begin{pmatrix} ا_1 \\ ا_2 \\ ا_3 \end{pmatrix}$ الى ب ٣

= سعر بيع الوحدة فى ب٣ — اجمالى تكلفة الوحدة من $\begin{pmatrix} ا_1 \\ ا_2 \\ ا_3 \end{pmatrix}$ ومباعة فى ب ٣

$$= \begin{pmatrix} ٤٠٠ \\ ٤٠٠ \\ ٤٠٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢٥٠ \\ ٣٨٠ \\ ٣٧٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٥٠ \\ ٢٠ \\ ٣٠ \end{pmatrix} \text{ مليم}$$

وبذلك يتحور الهدف المنشود الى ء (ص) = تضخيم س١١ ص١١

القيود والعوامل المحددة :

مجـ ١ ≤ ٢٠٠٠ وحدة

مجـ ٢ ≤ ١٥٠٠

مجـ ٣ ≤ ١٨٠٠

مجـ ب١ ≤ ١٦٠٠

مجـ ب٢ ≤ ٢٤٠٠

مجـ ب٣ ≤ ٢٠٠٠

وكذلك شرط عدم السلبية لكافة المعاملات.

وتتركز طريقة النقل كالمعتاد فى الخطوات الآتية:

١ — تصوير أول حل بدائى ممكن .

٢ — اختبار المثالية ، وقبول الحل على أنه الحل الأمثل أو ايجاد حل أفضل من السابق.

٣ — تكرار اختبار المثالية والبحث عن حل أفضل حتى تبلغ الحل الأمثل .

أولا : إيجاد أول حل بدائى ممكن :

يمكن تكملة الجدول الأول الذى يمثل أول حل بدائى ممكن من واقع البيانات السابقة حيث تقيد معدلات الربح المختلفة المستنتجة فيما سبق بدلا من تكاليف النقل من وحدة لآخرى داخل المربعات الصغرى.

كما تستخدم طريقة الركن الشمالى الشرق فى ملء خلايا الجدول المختلفة حيث نبدأ بالخلية ا١ ب١ وتحملها بالمقدار ١٦٠٠ وحدة وهى مجموع مايحتاج إليه مركز توزيع ب١ ويرسل المصنع ا٢ باقى إنتاجه إلى مركز توزيع ب٢ وقدره ٤٠٠ وحدة ثم يستكمل ب٢ باقى مطلوبه من مصنع ا٢ وقدره ٢٠٠٠ وحدة . ثم يرسل ا٣ باقى إنتاجه (وقدره ٥٠٠ وحدة) إلى ب٣ . ويستكمل ب٣ باقى مطلوبه (١٥٠٠ وحدة) من مصنع ا٣ الذى يقوم بتخزين المتبقى من إنتاجه بعد ذلك .

ويلاحظ فى هذا المثال أن مجموع الوحدات المنتجة تزيد على عدد الوحدات المطلوبة ، ولذا يجب إضافة عمود إضافى لتكملة الفرق ويسمى بالعمود الصورى Dummy Column حيث أنه لايمثل أى عملية نقل أو توزيع بل يعتبر مكملا للصفوف والأعمدة حتى يتم تساوى مجموع الأعمدة مع مجموع الصفوف

ويلاحظ أنه عند ترتيب الجداول يمكن أن ترتب المصانع رأسيا (ممثلة فى أعمدة) بينما ترتب مراكز التوزيع أفقيا (ممثلة فى صفوف) كما رتبت الجداول فى المثال السابق . كما أنه يمكننا أن نعكس الترتيب حيث ترتب المصانع أفقيا (فى شكل صفوف) بينما ترتب مراكز التوزيع رأسيا (ممثلة فى أعمدة) كما سنتبع فى حل هذا المثال رغبة فى تنويع طرق ترتيب الجداول .

ويمكن اتمام الجدول الذى يمثل أول حل بدائى ممكن كما يلى :

إلى ← من ↓	ب١	ب٢	ب٣	العمود الصورى (ب ٤)	مجموع
ا١	١٩٠ ١٦٠٠	١٤٠ ٤٠٠	١٥٠	صفر	٢٠٠٠
ا٢	٧٠	١١٠ ٢٠٠٠	٢٠ ٥٠٠	صفر	٢٥٠٠
ا٣	٧٠	صفر	٣٠ ١٥٠٠	صفر ٣٠٠	١٨٠٠
مجموع	١٦٠٠	٢٤٠٠	٢٠٠٠	٣٠٠	٦٣٠٠

مجموع الأرباح المحققة = مجاس اب ×اب

= ١٦٠٠ × ١٩٠ + ٤٠٠ × ١٤٠ + ٢٠٠٠ × ١١٠

+ ٥٠٠ × ٢٠ + ١٥٠٠ × ٣٠ = ٦٣٥٠٠٠ مليم

= ٦٣٥ جنيها

ثانيا : اختبار مثالية الجدول الأول :

تتبع أيضا طريقة حجر الوطء فى اختبار مثالية الجدول الأول وتقييم الخلايا الفارغة مع مراعاة أنه عند نقل أى وحدة من خلية إلى أخرى طبقاً لخط سير مرسوم نتابع أثر ذلك على تغيير الأرباح وإذا كان الناتج موجباً فانه يعنى زيادة فى الربح ويستخدم فى تحسين الحـــل بعكس حالة تخفيض التكاليف عندما كنا ننظر إلى الخلايا التى تقيم بمقادير سالبه حيث تؤدى الى تقليل التكاليف .

وتتبع نفس الطريقة السابقة لتقييم الخلايا الفارغة كالآتى :

الخلية (ا١ ب٣)

خط السير = من ا٢ب٣ الى ا٢ب٢ من ا١ب٢ الى ا١ب٣

تغير الربح : — ٢٠ + ١١٠ — ١٤٠ + ١٥٠ = ١٠٠ مليم

أى أن نقل وحدة الى ا١ب٣ طبقا لخط السير المرسوم سيزيد الأرباح بمعدل مائة مليم لكل وحدة منقولة .

الخلية (ا١ب٤)

خط السير : من ا١ب٢ الى ا٢ب٢ ، من ا٢ ب٣ الى ا٢ب٣ ، من ا٢ب٤ الى ا١ب٤

تغير الربح : — ١٤٠ + ١١٠ — ٢٠ + ٣٠ — صفر + صفر

= — ٢٠ مليم (تخفيض فى الربح)

الخلية (ا٢ب١)

خط السير : من ا٢ب٢ الى ا١ب٢ ، من ا١ب١ الى ا٢ب١

تغير الربح = — ١١٠ + ١٤٠ — ١٩٠ + ٧٠

= — ٩٠ مليم (تخفيض فى الربح)

الخلية (ا٢ب٤)

خط السير : من ا٢ب٣ الى ا٢ب٣ ، من ا٢ب٤ الى ا٢ب٤

تغير الربح = — ٢٠ + ٣٠ — صفر + صفر = ١٠ مليم (زيادة فى الربح)

الخلية (ا ب ١)

خط السير : من ا ب ١ الى ا ب ٢ ، من ا ب ٢ الى ا ب ٣ ، ا ب ٣ الى ا ب ١

تغير الربح = — ١٩٠ + ١٤٠ — ١١٠ + ٢٠ — ٣٠ + ٧٠

= — ١٠٠ مليم (تخفيض فى الربح)

الخلية (ا ب ١)

خط السير = من ا ب ٢ الى ا ب ٣ ، ا ب ٣ الى ا ب ٢

تغير الربح = — ١١٠ + ٢٠ — ٣٠ + صفر

= — ١٢٠ مليم (تخفيض فى الربح)

مما سبق يتبين أن الجدول السابق ليس هو الحل الأمثل بل يمكن تضخيم الربح اذا نقلنا أكبر عدد من الوحدات يمكن نقله حسب خطوط السير المرسومة الى الخلية ا ب ٣ (حيث يتحقق لنا زيادة فى الربح مائة مليم عن كل وحدة منقولة) والخلية ا ب ٤ (حيث يتحقق لنا زيادة فى الربح عشرة مليم من كل وحدة منقولة) .

وبطبيعة الحال تركز جهودنا أولا الى الخلية ا ب ٣ لتضخيم الربح لأقصى حد . وبما أن عدد الوحدات فى الخلية ا ب ٢ (نفس صف الخلية ا ب ٣) ٤٠٠ وحدة وعدد الوحدات فى الخلية ا ب ٣ (نفس عمود الخلية ا ب ٣) ٥٠٠ وحدة فإن أكبر عدد من الوحدات يمكن نقله الى الخلية ا ب ٣ هو ٤٠٠ وحدة مما يسبب زيادة فى الربح بمقدار ٤٠ جنيها (٤٠٠ وحدة × ١٠٠ مليم) .

ثالثا : الجدول الثانى (حل أفضل من الحل الأول)

بناء على اختبار المثالية السابق ونقل ٤٠٠ وحدة الى الخلية ا١ب٣ طبقاً لخط السير المرسوم بعالية .

يمكن تحديد المقادير الجديدة للخلايا المذكورة فى خط السير المرسوم كالآتى :

الخليه ا١ب٣ = ٥٠٠ — ٤٠٠ = ١٠٠ وحدة

الخلية ا٢ب٢ = ٢٠٠٠ + ٤٠٠ = ٢٤٠٠

الخلية ا١ب٢ = ٤٠٠ — ٤٠٠ = صفر

الخلية ا١ب٣ = صفر + ٤٠٠ = ٤٠٠

ويمكن بعد ذلك تصوير الجدول الثانى الذى يبين حل آخر ممكن أفضل من الحل السابق كالتالى :

من ← الى ↓	ب١	ب٢	ب٣	العمود الصورى ب٤	مجموع
ا١	١٩٠ ١٦٠٠	١٤٠	١٥٠ ٤٠٠	صفر	٢٠٠٠
ا٢	٧٠	١١٠ ٢٤٠٠	٢٠ ١٠٠	صفر	٢٥٠٠
ا٣	٧٠	صفر	٣٠ ١٥٠٠	صفر ٣٠٠	١٨٠
مجموع	١٦٠٠	٢٤٠٠	٢٠٠٠	٣٠٠	٦٣٠٠

مجموع الأرباح المحققة = الأرباح السابقة (طبقاً للجدول الأول) + الزيادة فى الربح نتيجة التغيير .

= ٦٣٥ + ٤٠ = ٦٧٥ ج

وتحسب أيضاً بتطبيق القانون مجـ س اب ص اب

= ١٦٠٠ × ١٩٠ + ٤٠٠ × ١٥٠ + ٢٤٠٠

× ١١٠ + ١٠٠ × ٢٠ + ١٥٠٠ × ٣٠

= ٦٧٥٠٠٠ مليم

= ٦٧٥ ج

رابعاً : اختبار مثالية الجدول الثانى :

نتبع نفس الطريقة السابقة فى تقييم الخلايا الفارغة لاختبار مثالية الجدول الثانى .

الخلية (١ ب ٢)

خط السير : من ا ١ ب٣ إلى ا٢ ب٣ ، من ا٢ ب٢ إلى ا١ ب٢

تغير الربح = — ١٥٠ + ٢٠ — ١١٠ + ١٤٠ = ١٠٠ مليم (تخفيض فى الربح)

الخلية (١ ا ب٤)

خط السير : من ا٢ ب٤ إلى ا٢ ب٣ ، من ا١ ب٣ إلى ا١ ب٤

تغير الربح = — صفر + ٣٠ — ١٥٠ + صفر = — ١٢٠ مليم (تخفيض فى الربح) .

الخلية (ا٢ ب١)

خط السير : من ا١ ب١ إلى ا١ ب٣ ، من ا٢ ب٣ إلى ا٢ ب١

تغير الربح : — ١٩٠ + ١٥٠ — ٢٠ + ٧٠ = ١٠ مليم (زيادة فى الربح)

الخلية (ا٢ ب٤)

خط السير : من ا٢ ب٤ إلى ا٢ ب٣ ، من ا٢ ب٣ إلى ا٢ ب٤

تغير الربح — صفر + ٣٠ — ٢٠ + صفر = ١٠ مليم (زيادة فى الربح) .

الخلية (ا٢ ب١)

خط السير : من ا١ ب١ إلى ا١ ب٣ ، من ا٢ ب٣ إلى ا٢ ب١

تغير الربح = — ١٩٠ + ١٥٠ — ٣٠ + ٧٠ = صفر (لاتغير فى الربح)

الخلية (ا٣ ب٢)

خط السير من ا٢ب٢ إلى ا٢ب٣ ، من ا٢ب٣ إلى ا٣ب٢

تغير الربح = — ١١٠ + ٢٠ — ٣٠ + صفر = — ١٢٠ مليم (تخفيض فى الربح) .

مما سبق يتبين أن الجدول السابق ليس هو الحل الأمثل ويمكن زيادة الربح إذا نقلنا أكبر عدد من الوحدات يمكن نقله بحسب خطوط السير المرسومة الى الخلية ا٢ ب١ أو ا٢ ب٤ حيث يتحقق لنا زيادة فى الربح بمعدل عشرة مليمات لكل وحدة منقولة لأى من الخليتين ، وبما أن معدل الزيادة فى الربح لكل وحدة فى كل من الخليتين وعدد الوحدات التى يمكن نقلها فى كل حالة واحد أيضاً وهو المقدار الموجود فى الخلية ا٢ ب٣ وقدره ١٠٠ وحدة فاننا نختار أحد الخليتين وسيكون الناتج النهائى واحداً فى كلا الاختيارين ويتلخص فى زيادة الأرباح عشرة جنيهات (١٠٠ وحدة × ١٠ مليم).

خامساً : الجدول الثالث (حل أفضل من الجدول الثانى)

وبناء على اختيار المثالية السابق ونقل ١٠٠ وحدة إلى الخلية ا٢ب٤ (بفرض اختيارها) طبقاً لخط السير المرسوم بعاليه يمكن تحديد المقادير الجديدة للخلايا المذكورة فى خط السير المرسوم كالآتى :

الخلية ا٢ب٣ = ١٠٠ — ١٠٠ = صفر

الخلية ا٣ب٣ = ١٥٠٠ + ١٠٠ = ١٦٠٠

الخلية ا٣ب٤ = ٣٠٠ — ١٠٠ = ٢٠٠

الخلية ا٢ب٤ = صفر + ١٠٠ = ١٠٠

ويمكن بعد ذلك تصوير الجدول الثالث الذى يبين حل أفضل من الحل السابق كالتالى .

سادسا : اختبار مثالية الجدول الثالث :

تتبع نفس الطريقة السابقة فى تقييم الخلايا الفارغة لاختبار مثالية الجدول الثالث :

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	مجموع
ا١	١٩٠ ١٦٠٠	١٤٠ ٠	١٥٠ ٤٠	صفر	٢٠٠٠
ا٢	٧٠	١١٠ ٢٤٠٠	٢٠	صفر ١٠٠	٢٥٠٠
ا٣	٧٠	صفر	٣٠ ١٦٠٠	صفر	١٨٠٠
مجموع	١٦٠٠	٢٤٠٠	٢٠٠٠	٣٠٠	٦٣٠٠

الخلية (ا١ب٢) من ا١ب٣ إلى ا٢ب٣، من ا٢ب٤ إلى ا٢ب٤، من ا٢ب٢ إلى ا١ب٢

$= -١٥٠ + ٣٠ - صفر + صفر - ١١٠ + ١٤٠$

$= -٩٠$ مليم (تخفيض فى الربح)

الخلية (ا ١ ب ٤) من ا ١ ب ٤ إلى ا ٢ ب ٣ ، من ا ١ ب ٣ إلى ا ١ ب ٤

- صفر + ٣٠ - ١٥٠ + صفر = - ١٠ مايم

(تخفيض فى الربح)

الخلية (ا ٢ ب ١) من ا ٢ ب ٤ إلى ا ٢ ب ٤ من ا ٢ ب ٣ إلى ا ١ ب ٣ ، من ا ١ ب ١ إلى ا ٢ ب ١

- صفر + صفر - ٣٠ + ١٥٠ - ١٩٠ + ٧٠

= صفر (لاتغيير)

الخليا (ا ٢ ب ٣) من ا ٢ ب ٤ إلى ا ٢ ب ٤ ، من ا ٢ ب ٣ إلى ا ٢ ب ٣

- صفر + صفر - ٣٠ + ٢٠ = - ١٠

(تخفيض فى الربح

الخلية (ا ٢ ب ١) من ا ١ ب ١ إلى ا ١ ب ٣ ، من ا ٢ ب ٣ إلى ا ٢ ب ١

- ١٩٠ + ١٥٠ - ٣٠ + ٧٠ = صفر

(لا تغيير)

الخلية (ا ٣ ب ٢) من ا ٢ ب ٢ إلى ا ٢ ب ٩ ، من ا ٣ ب ٤ إلى ا ٢ ب ٣

- ١١٠ + صفر - صفر + صفر = - ١١٠

(تخفيض فى الربح)

ملاحظة : يهمل تقييم الخليه الوارد بعد ذلك ص ٢٧٩ حيث أنه كتب خطأ .

الخلية (ا٣ب٢)

خط السير = من ا٣ب٣ الى ا٣ب٢ ، من ا٣ب٣ الى ا٣ب٢

تغير الربح = - ١١٠ + ٢٠ - ٣٠ + صفر = - ١٢٠ مليم

(تخفيض فى الربح)

مما سبق يتبين أنه لن يمكن زيادة أى أرباح باستخدام أى خلية من الخلايا الفارغة وعلى ذلك يكون الجدول الحالى هو الحل الأمثل ويمكن تلخيصه فيما يلى :

يوزع مصنع ا١ إنتاجه البالغ ٢٠٠٠ وحدة كالآتى :

١٦٠٠ وحدة إلى مركز توزيع ب١

٤٠٠ وحدة إلى مركز توزيع ب٣

يوزع مصنع ا٢ انتاجه البالغ ٢٥٠٠ وحدة كالآتى :

٢٤٠٠ وحدة إلى مركز توزيع ب٢

١٠٠ وحدة تضاف الى المخزون

يوزع مصنع ا٣ انتاجه البالغ ١٨٠٠ وحدة كالآتى :

١٦٠٠ وحدة الى مركز توزيع ب٣

٢٠٠ وحدة تضاف الى المخزون

مجموع الربح (الحد الأقصى للربح) ٦٨٥ جنيها.

اساليب اخرى فى طريقة النقل :

تعتمد أساليب بحوث العمليات على إيجاد حل بدائى واختبار المثالية وتكرار العمل حتى الوصول إلى حل أمثل وفى طريقة النقل استخدمنا فيما سبق طريقة الركن الشمالى الشرقى لإيجاد الحل البدائى وهناك طرق أخرى لإيجاد الحل البدائى واختبار المثالية بخلاف طريقة الركن الشمالى الشرقى وإن كانت أقل انتشاراً ومن هذه الطرق طريقة VAM وطريقة التكلفة الدنيا .

اولا: طريقة VAM :

وهى طريقة فوجـــل التقريبية Vogel's Approximation Method وتختصر بالحروف الأولى وتسمى طريقة VAM . وتعتمد هذه الطريقة على المقارنة بين الفروق بين تكاليف الخلايا الموجودة فى كل صف وفى كل عمود ومحاولة الاستفادة بأكبر فروق ممكنة حيث أن الفرق بين أى خليتين يمثل زيادة فى التكلفة أو فى الربح ويهمنا أن نتخلص من أكبر زيادة فى التكلفة أو الاستفادة بأكبر زيادة فى الربح ، ولترتيب استخدام هذه الطريقة فى الحل نتتبع الخطوات الآتية :

١ — نحسب فى كل صف أو عمود الفرق بين التكلفة (أو الربح) للخلية ذات أقل تكلفة (أو ربح) والخلية التى تليها فى التكلفة (أو فى الربح) ونسجلها فى عمود فروق الصفوف وصف فروق الأعمدة .

٢ — نحدد أكبر قيمة فى فروق الصفوف أو الأعمدة ونختار الخلية ذات التكلفة الأقل فى ذلك الصف أو العمود بكل ما نستطيع تحميله لهذه الخلية (أى بمجموع المتاح فى الصف أو العمود أيهما أقل) .

٣ — بتحميل الخلية السابقة سيترتب إلغاء الصف أو العمود الذى استكمل نتيجة تحميل الخلية المذكورة . وإذا تم استكمال كل من الصف والعمود فانه يتم إلغاء أحدهما فقط ويكتب الآخر صفرا .

٤ — يكرر العمل طبقا للخطوات السابقة فى الجدول الجديد حتى يتم تحميل جميع الصفوف والأعمدة

مثال ٨/٣ :

المطلوب حل المثال رقم ٦/٣ باستخدام طريقة VAM

الحل :

نعيد الجدول الخاص بالمثال بعد اضافة عمود لفروق الصفوف وصف لفروق الأعمدة على النحو التالى :

الجدول البدائى (الأول) (بطريقة VAM)

من ← / إلى ↓	ا١	ا٢	ا٣	مجموع	فروق الصفوف
ب١	١٢٠	١٠٠	٥٠	٢٠٠	٥ (١٠٠-٥٠)
ب٢	١٥٠	٨٠	٢٠	٧٠٠	٦٠ (٨٠-٢٠)
ب٣	٤٠	٥٠	١٠٠	٣٠٠	١٠ (٥٠-٤٠)
مجموع	٤٠٠	٦٠٠	٢٠٠	١٢٠٠	
فروق الأعمدة	٨٠ (١٢٠ - ٤٠)	٣٠ (٨٠ - ٥٠)	٣٠ (٨٠ - ٥٠)		

نعالج الحل فى الجدول (البدائى) السابق على النحو التالى :

١ — أكبر الفروق فى الجدول السابق (٨٠) فى عمود ا١ ولذلك نحمل الخلية (ا١ ب٣) ذات أقل تكلفة فى ذلك العمود (٤٠) بأقصى كمية ممكنة وهى مجموع عمود (ا١) أو صف (ب٣) أيهما أقل أى ٣٠٠ وحدة .

٢ — نلغى الصف ب٣ بعد تحميل الخلية ا١ ب٣ بمقدار ٣٠٠ وحدة (وطبعاً نخفض مجموع عمود ا١ بهذا المقدار ليصبح (٤٠٠ — ٣٠٠) ١٠٠ وحدة فقط و نعيد تصوير الجدول على النحو التالى :

من ← / الى ↓	ا١	ا٢	ا٣	مجموع	فروق الصفوف
ب١	١٢٠	١٠٠	٥٠	٢٠٠	٥٠ (١٠٠ـ٥٠)
ب٢	١٥٠	٨٠	٢٠	٧٠٠	٦٠ (٨٠ـ٢٠)
مجموع	١٠٠	٦٠٠	٢٠٠	٩٠٠	
فروق الأعمدة	٣٠ (١٥٠ـ١٢٠)	٢٠ (١٠٠ـ٨٠)	٣٠ (٥٠ـ٢٠)		

ونعالج الجدول السابق بنفس خطوات معالجة الجـــدول الأول كما يلى :

١ — أكبر الفروق فى الجدول السابق (٦٠) فى صف (ب٢) ولذلك نحمل الخلية (ا٣ ب٢) ذات أقل تكلفة فى ذلك الصف (٢٠) بأقصى كمية ممكنة وهى مجموع عمود (ا٣) او صف (ب٢) أيهما اقل أى ٢٠٠ وحدة .

٢ — نلغى العمود ا٣ بعد تحميل الخلية ا٣ ب٢ بمقدار ٢٠٠ وحدة (وطبعاً نخفض مجموع صف ب٢ بهذا المقدار ليصبح (٧٠٠ـ٢٠٠) ٥٠٠ وحدة فقط ونعيد تصوير الجدول الثالث على النحو التالى :

من ← إلى	ا١	ا٢	مجموع	فروق الصفوف
ب١	١٢٠	١٠٠	٢٠٠	٢٠ ١٢٠ — ١٠٠
ب٢	١٥٠	٨٠	٥٠٠	٣٠ ١٥٠ — ٨٠
مجموع	١٠٠	٦٠٠	٧٠٠	
فروق الأعمدة	٣٠ ١٥٠ — ١٢٠	٢٠ ١٠٠ — ٨٠		

ونعالج الجدول السابق بنفس الخطوات المذكورة فيما سبق على النحو التالى :

١ — أكبر الفروق فى الجدول السابق (٣٠) فى عمود ا١ أو فى صف ب٢ ونختار أحدهما اجتهاديا أو عشوائيا . فى هذا الجدول مجموع صف ب٢ (٥٠٠) بينما مجموع عمود ا١ (١٠٠) وربما يكون لدينا فرصة لتحميل عدد أكبر إذا اخترنا الصف ب٢ . ثم نحمل الخلية (ا٢ ب٢) ذات أقل تكلفة فى ذلك الصف (٨٠) بأقصى كمية ممكنة وهى مجموع عمود (ا٢) أو صف (ب٢) أيهما أقل أى ٥٠٠ .

٢ — نلغى الصف ب٢ بعد تحميل الخلية ا٢ ب٢ بمقدار ٥٠٠ وحدة (وطبعاً نخفض مجموع عمود ا٢ بهذا المقدار ليصبح (٦٠٠ — ٥٠٠) ١٠٠ وحدة فقط ونعيد تصوير الجدول الرابع على النحو التالى :

من ← إلى ↓	ا١	ا٢	مجموع
ب١	١٢٠	١٠٠	٢٠٠
مجموع	١٠٠	١٠٠	

نلاحظ أننا أهملنا عمود فروق الصفوف وصف فروق الأعمدة فى هذا الجدول حيث أنه لم يصبح لدينا سوى صف واحد وعمودين وبالتالى لن ينتج لدينا سوى فرق واحد بين تكلفة ا١ ب١ ، ا٢ ب١ كما نلاحظ أن مجموع ب١ هو ٢٠٠ ومجموع كل ا١ ، ا٢ ١٠٠ ، ١٠٠ على الترتيب ولذلك نحمل كل خلية من ا١ ب١ ، ا٢ ب١ بمائة وحدة .

الخلاصة :

من الجداول السابقة نلاحظ أننا حملنا على الترتيب الخلايا الآتية :

الجدول الأول : الخلية ا١ ب٣ بمقدار ٣٠٠ وحدة

الجدول الثانى : الخلية ا٣ ب٣ بمقدار ٢٠٠ وحدة

الجدول الثالث : الخلية ا٢ ب٣ بمقدار ٥٠٠ وحدة

الجدول الرابع : الخلية ا١ ب١ بمقدار ١٠٠ وحدة

والخلية ا٢ ب١ بمقدار ١٠٠ وحدة

ويمكن تصوير ذلك فى جدول التوزيع الأمثل للمثال السابق على الشكل التالى :

من ← إلى ↓	أ١	أ٢	أ٣	مجموع
ب١	١٢٠ ١٠٠	١٠٠ ١٠٠	٥٠	٢٠٠
ب٢	١٥٠	٨٠ ٥٠٠	٢٠ ٢٠٠	٧٠٠
ب٣	٤٠ ٣٠٠	٥٠	١٠٠	٣٠٠
مجموع	٤٠٠	٦٠٠	٢٠٠	١٢٠٠

ونتابع إيجاد مجموع التكلفة بجمع حواصل ضرب عدد الوحدات فى كل خلية فى تكلفة الخلية نفسها . ونلاحظ أن الحل الأمثل باستخدام طريقة VAM هو نفس الحل الأمثل فى مثال (٤/٣) باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى . (انظر صفحة ٢٦٢)

ثانيا : طريقة التكلفة الدنيا Least Cost Method :

وتعتمد هذه الطريقة على المقارنة بين تكاليف الخلايا واختيار الخلايا ذات أقل تكلفة ممكنة وتتحدد أكبر كمية ممكن تحميلها فى الخلية بحسب مجموع الصف أو مجموع العمود الذى تقع فيه الخلية أيهما أقل . ثم يتابع تحميل الخلايا بحسب الترتيب التصاعدى لتكاليف الوحدة حتى يتم توزيع جميع الوحدات على الخلايا .

مثال ٩/٣ :

المطلوب حل المثال رقم ٦/٣ باستخدام طريقة التكلفة الدنيا .

الحل : بملاحظة الجدول المذكور فى المثال وتكلفة الخلايا المختلفة يمكن ترتيب تحميل الخلايا طبقا للتكاليف الخاصة بكل خلية على النحو التالى :

(١) الخلية ا٣ ب٢ ذات أقل تكلفة (٢٠) ويمكن تحميلها بمقدار ٢٠٠ وحدة (مجموع عمود ا٣) .

(٢) الخلية ا١ ب٣ ذات تكلفة (٤٠) ويمكن تحميلها بمقدار ٣٠٠ وحدة (مجموع صف ب٣) .

(٣) الخلية ا٣ ب١ ذات تكلفة (٥٠) ولا يمكن تحميلها لاستكمال العمود ا٣ .

(٤) الخلية ا٢ ب٣ ذات تكلفة (٥٠) ولا يمكن تحميلها لاستكمال الصف ب٣

(٥) الخلية ا٢ ب٢ ذات تكلفة (٨٠) يمكن تحميلها بمقدار ٥٠٠ وحدة باقى المتاح فى صف ب٢ بعد تحميل الخلية ا٣ ب٢ بمقدار ٢٠٠ وحدة .

(٦) الخلية ا٢ ب١ ذات تكلفة (١٠٠) يمكن تحميلها بمقدار ١٠٠ وحدة باقى المتاح فى العمود ا٢ بعد تحميل الخلية ا٢ ب٢ بمقدار ٥٠٠ وحدة .

(٧) الخلية ا٣ ب٣ ذات تكلفة (١٠٠) لا يمكن تحميلها لاستكمال كل من العمود ا٣ والصف ب٣ .

(٨) الخلية ا١ ب١ ذات تكلفة (١٢٠) يمكن تحميلها بمقدار ١٠٠ وحدة باقى المتاح فى العمود ا١ بعد تحميل الخلية ا١ ب٣ بمقدار ٣٠٠ وحدة وكذلك باقى المتاح فى الصف بعد تحميل الخلية ا٢ ب١ بمقدار ١٠٠ وحدة .

(٩) ا١ ب٢ ذات تكلفة (١٥٠) ولا يمكن تحميلها لاستكمال كل من العمود ا١ والصف ب٢ .

ويمكن بذلك ترتيب الحل الأمثل فى جدول التوزيع التالى :

وتتابع إيجاد مجموع التكلفة بجمع حواصل ضرب عدد الوحدات فى كل خلية فى تكلفة الخلية نفسها . ونلاحظ أن الحل الأمثل باستخدام طريقة التكاليف الدنيا هو نفس الحل الأمثل فى مثال (٣/٤) باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى (أنظر صفحة ٢٦٢) .

ثالثا : طريقة التوزيع المعدل لاختبار المثالية :

Modified Distribution Method

استخدمنا من قبل طريقة حجر الوطء Stepping Stone Methods عند اختبار المثالية فى الخلايا الفارغة فى جداول التوزيع باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى . ويمكن استخدام طرق أخرى بخلاف طريقة حجر الوطء منها طريقة التوزيع المعدل .

وتتلخص طريقة التوزيع المعدل فى إضافة صف جديد وعمود جديد فى الجدول ويتم ملء هذه الخانات فى الصف الجديد والعمود الجديد طبقا للعلاقة التالية .

تكلفة كل خلية = القيمة الموضوعة فى العمود الجديد أمام هذه الخلية + الموضوعة فى الصف الجديد أمام هذه الخلية .

$$ت_{ا\,ب} = س_ا + ص_ب$$

حيث أن $س_ا$ = قيمة الخلية فى العمود ا

$ص_ب$ = قيمة الخلية فى الصف ب

ولحساب قيمة كل من س ، ص فى كل من الصف والعمود الجديدين نستكمل معادلات العلاقات الموجودة بين هذه العناصر وتكلفة كل خلية من الخلايا المليئة والمستخدمة فى الحل . وباستخدام التحليل الجبرى للمعادلات الآتية يمكن إيجاد القيم الموجودة فى كل خلية من الخلايا الجديدة فى الصف والعمود الجديدين . وتستخدم هذه القيم فى اختبار المثاليه (بدلا من عمل المسارات المختلفة طبقا لطريقة حجر الوطء باستخدام العلاقة التالية .

قيمة الخلية الفارغة = قيمة تكلفة الوحدة الخاصة بالخلية الفارغة — خانة

العمود الجديد أمام الخلية — خانة الصف الجديد أمام الخلية .

قيمة الخلية ا ب = ت ا ب — س ا — ص ب

وبذلك ينتج لنا نفس القيم التى تنتج باستخدام طريقة ، حجر الوطء . ونتابع تنفيذ نفس الاجراءات السابق استخدامها عند اختبار المثالية باستخدام طريقة حجر الوطء .

مثال ٣/١٠

المطلوب استخدام طريقة التوزيع المعدل فى اختبار مثالية جدول التوزيع البدائى (الأول) بمثال ٣/٦ .

الحل : نبدأ أولا بإعادة الجدول المذكور بعد إضافة الصف والعمود الجديدين .

لإيجاد قيمة كل من س ، ص نستكمل المعادلات الآتية للخلايا المستخدمة فى الحل السابق .

ت = س + ص

(ا١ ب١) ١٢٠ = س١ + ص١ (١)

(ا١ ب٢) ١٥٠ = س١ + ص٢ (٢)

(ا٢ ب٢) ٨٠ = س٢ + ص٢ (٣)

(ا٢ ب٣) ٥٠ = س٢ + ص٣ (٤)

(ا٣ ب٣) ١٠٠ = س٣ + ص٣ (٥)

نفرض أن س١ = صفر

من (١) ص١ = ١٢٠

من (٢) ص٢ = ١٥٠

من (٣) س٢ = ٨٠ — ١٥٠ = — ٧٠

من (٤) ص٣ = ٥٠ — (— ٧٠) = ١٢٠

من (٥) س٣ = ١٠٠ — ١٢٠ = — ٢٠

ولتقييم الخلايا الفارغة نستخدم العلاقة الآتية بعد التعويض عن قيم كل من س ، ص.

قيمة الخلية ا ب = ت١ب — س١ — ص١

ا٢ ب١ = ت١٢ — س٢ — ص١ = ١٠٠ — (— ٧٠) — ١٢٠ = ٥٠

ا٣ ب١ = ت١٣ — س٣ — ص١ = ٥٠ — (— ٢٠) — ١٢٠ = — ٥٠

ا١ ب٢ = ت٢١ — س١ — ص٢ = ٢٠ — (— ٢٠) — ١٥٠ = — ١١٠

ا١ ب٣ = ت٣١ — س١ — ص٢ = ٤٠ — صفر — ١٢٠ = — ٨٠

ويلاحظ أن هذه القيم هى نفس القيم التى حصلنا عليها من اختبار المثالية للجدول المذكور باستخدام حجر الوطء (أنظر صفحة ٢٥١ ، ٢٥٢) .

وفى الواقع تعتبر طريقة المتوسط المعدل هى النموذج الثنائى لطريقة حجر الوطء (حيث تعتبر طريقة حجر الوطء النموذج الأصلى) .

ورغم تعدد أساليب وطرق حل مشاكل التوزيع باستخدام نموذج النقل يفضل المؤلف طريقة الركن الشمالى الشرقى لعموميتها وطريقة حجر الوطء فى اختبار المثالية لسهولتها . ويلاحظ أنه قد تكون طريقة التكلفة الدنيا سهلة فى المثال المشروح بالكتاب ولكن لا تمكننا من استكمال الحل فى حالة كثرة عدد الخلايا (صفوف وأعمدة) وكذلك طريقة VAM قد تعقد الحل فى المشاكل المعقدة . وبدون شك تعتبر طريقة المتوسط المعدل أكثر ملاءمة للأسلوب العلمى وخصوصاً عند استخدام الحاسب الألكترونى حيث تحسب قيم الخلايا مرة واحدة وتحفظ بالذاكرة بالحاسب الألكترونى وبذلك يتم تقييم الخلايا الفارغة فى كل جدول فورا وبدون تكرار لحساب التقييم . ولكن يلاحظ أنه عند عدم استخدام الحاسب الألكترونى كما هو الحال فى هذه الأمثلة التعليمية سيضطر الطالب إلى عمل عمليات حسابية كثيرة عند استخدام طريقة المتوسط المعدل هو فى غنى عنها إذا استخدم طريقة حجر الوطء .

مواقع حل مشاكل البرامج الخطية

فى بعض الحالات تقابلنا عقبات وموانع رياضية فى حل مشاكل البرامج الخطية ويمكن تحديدها فيما يلى :

١ — استخدام طريقة السمبلكس :

إذا ماتساوت § عند قسمة عمود س . على العمود الرئيسى فى الجدول ومعنى ذلك أنه لن نتمكن من حل المعادلات ، حيث أن هذا يدل على أن معادلتين أو صفين يعطونا نفس البيانات مما يدل على أن أحد هذه الصفوف أو المعادلات لا قيمة له .

٢ — استخدام طريقة النقل :

يجب أن تكون عدد الخلايا المليئة فى جدول النقل مساوياً لعدد الصفوف + عدد الأعمدة — ١ . فإذا قلت عدد الخلايا المليئة عن هذا المقدار سوف يصعب تقييم الخلايا وربما يتعذر الانتقال من الجدول إلى جدول آخر لتخفيض التكاليف وهناك بعض الاساليب الرياضية مثل أسلوب ابسيلون Epsilon Technique وغيره لمعالجة مثل هذه المشكلات ولكننا سوف لا نتعرض لها لضيق المكان .

مشاكل البرامج الخطية فى المشروعات الكبيرة :

تعتبر طريقة السمبلكس أفضل الطرق المستخدمة لحل المشاكل بالبرامج الخطية للمشروعات الكبيرة حيث أنها تعتبر الطريقة العامة التى يمكن استخدامها فى جميع الحالات . ولكن كلما ازداد عدد المتغيرات المتعلقة بالمشكلة كلما تعقدت العمليات الحسابية واستحالت . ولكن تمتاز طريقة السمبلكس باعتمادها على الطريقة الجبرية المتعلقة برياضة المصفوفات التى تتناسب مع لغات العقول الإلكترونية ، ولذلك تستخدم الشركات الكبيرة برامج مختلفة لطريقة السمبلكس لتستخدم فى حل المشاكل باستخدام العقول الإلكترونية. ويمكن مثلا إتمام حل مشكلة بها خمسون متغير بينهما علاقات خطية وتحدها

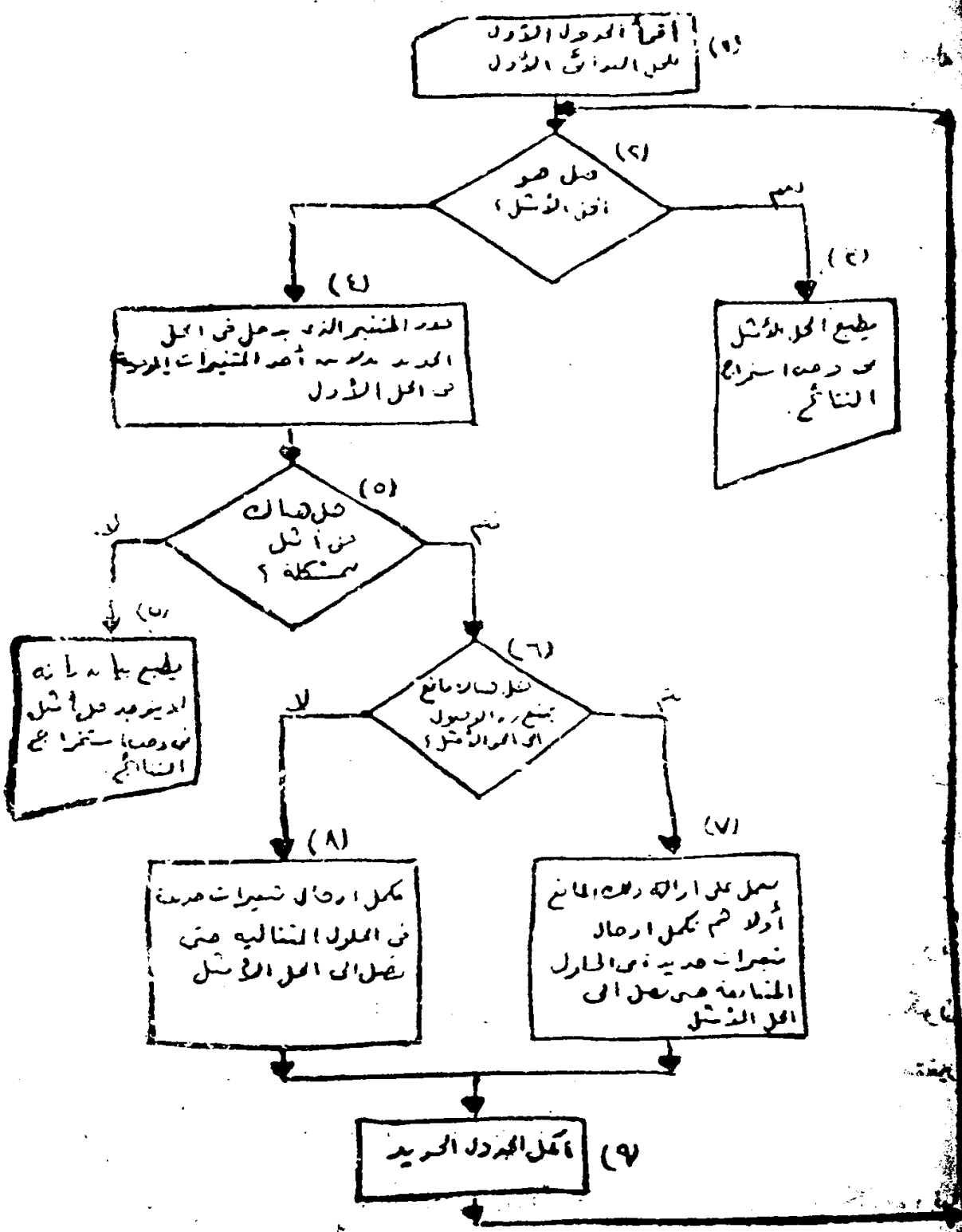
حوالى ٢٥ متباينة مختلفة باستخدام البرامج الخطية — طريقة السمبلكس — والعقول الإلكترونية فى دقائق محدودة حتى لاتستغرق الخطوات المختلفة للانتقال من جدول إلى جدول تالى أفضل منه ، أكثر من ثوانى معدودة بينما تستغرق — فى حالة إستخدام الآلات الحاسبة — مايقرب من ٤ ساعات ويبين ذلك بوضوح التوفير الكبير الذى يحققة إستخدام العقول الإلكترونية رغم إرتفاع ثمنها إلى حد كبير للغاية — فى تخفيض التكاليف وسرعة استخراج النتائج وحل المشاكل التى قد يستحال فيها إتمام العمليات الحسابية لكثرة عدد المتغيرات أو كثرة العلاقات المتشابكة .

ويبين الشكل رقم (٣) رسم تخطيطى بيانى لخطوات إتمام حل مشاكل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس على عقل الكترونى باستخدام البطاقات المثقوبة وتظهر الخطوات على شكل قطاعى Block Diagram وتظهر كل خطوة فى شكل قطاع مرقم يبين ترتيب تنفيذ هذه الخطوات(*)

وتستخدم الأشكال القطاعية عادة فى كثير من حالات إستخدام العقول الإلكترونية لتوضيح الخطوات والتعليمات التى تعطى للعقل الإلكترونى لتنفيذها وفقاً للنتائج التى يحتمل الحصول عليها .

(*) الشكل المذكور مقتبس من كتاب :

T.H. Naylor. and F.T. Byrne. Linear Programming. California. Wadsworth Pubishin Co.: Inc 1963, p. 114.



شكل رقم (٢) - شكل تخطيطي للطريقة السمبلكس

Block Diagram for Simplex Method

استخدامات البرامج الخطية لحل مشاكل الادارة:

يعتبر أسلوب البرامج الخطية أحدث أساليب تحسين الإدارة فبفضله يمكن استخدام الموارد بأكثر كفاءة وتساعد المديرين وتزيد من مقدرتهم على تفهمهم للمشاكل .

وقد بدأت الكثير من الشركات والمشروعات الكبيرة فى استخدام البرامج الخطية فى حل مشاكل كثيرة وأدى هذا الاستخدام إلى توفير مبالغ طائلة وأمثلة ذلك .

١ — قامت شركة توزيع أغذية كبيرة بحل مشكلة توزيع الأغذية من المخازن المختلفة المملوكة لها إلى عملائها باستخدام طريقة النقل للبرامج الخطية وأدت إلى تخفيض ٥٠٪ من مجموع تكاليف الشركة وقد بلغ هـــذا التخفيض ٥٠٠٠٠٠ دولار سنوياً .

٢ — عالجت شركة The Dow Dhemical Co. مشكلة اختيار أحد المصانع الثلاثة المملوكة لهـــا لإنتاج الطلبات الخاصة للعملاء لتقليل مجموع تكاليف الإنتاج والتوزيع لأكثر من ٣٠ منتج باستخدام طريقة السمبلكس والعقل الالكترونى IBM 7070 .

٣ — تستخدم شركة Dopont Co أسلوب البرامج الخطية للموازنة والتنسيق بين المراحل المختلفة لانتاج فى مصانعها الكيميائية . وتتكون نماذج البرامج الخطية لشاكلها من أكثر من ٨٠٠ معادلة و ٢٥٠٠ متغير ويتم حلها باستخدام العقول الإلكترونية (٧)

٤ — استخدمت شركة The Srandard Oil بكاليفورنيا العقل الالكترونى IBM 704 لحل مصفوفة برامج خطية تتكون من ٢٢٧ صف × ٧٥٠ عمود فى نموذج تمثلى للعمليات الخاصة بتكرير البترول . كما

قامت شركة بترول كبيرة أخرى باستخدام أسلوب البرامج الخطية لدراسة تخطيط وجدولة عملياتها الخاصة بالتكرير فى أحد مصانعها ونتج عن هـــذه الدراسات إعادة جدولة مرحلة هامة من مراحل الإنتاج . وقد أدى ذلك إلى تخفيض تكاليفها اليومية ٥٠٠٠ دولار (يومياً) بينما كانت تكاليف الدراسة التى قامت بذلك فى حدود ٢٠٠٠ دولار [١] .

٥ تستخدم البرامج الخطية بصفة عامة لحل المشاكل الآتية :

(ا) تستخدم بصفة عامة فى حل مشاكل المشروعات الكبيرة التى تستخدم أكثر من مادة خام أو تلتج أكثر من منتج معين لتحديد أحسن مزج من المواد الخام وأحسن تشكيله للانتاج لتحقيق أقصى ربح ممكن .

(ب) تستخدم بصفة عامة فى برامج تحديد كميات كل منتج فى كل مصنع وفى كل مدة .

(حـ) تستخدم فى تحديد طرق قص الأخشاب لتخفيض العادم للحد الأدنى

(د) تستخدم فى حل مشاكل ضبط المخزون والكمية الاقتصادية للانتاج

(هـ) تستخدم فى تحليل مشاكل موازنة رأس المال والاستثمار .

(و) تستخدم فى حل المشاكل الخاصة بتخفيض تكاليف النقل للحد الأدنى وتحديد أمثل توزيع للمنتجات بين مراكز الإنتاج ومراكز التوزيع وكذلك كافة مشاكل تخفيض التكاليف بصفة عامة .

(ز) تستخدم فى تخطيط الإنتاج إذا اتسمت السلعة بالموسمية والموازنة بين سياسات المخزون وسياسات الإنتاج على طول السنة .

(*) جميع هذه الأمثلة ماخوذة من كتاب :

T.H. Naylor and E.T. Byhne Linear Programming. California Wadaworth, Publishing Co. Inc. 1963.