مقدمة في
بحوث العمليات

تأليف

HAMDY A. TAHA

تعريب

الدكتور/ أحمد حسين علي حسين
قسم المحاسبة والمراجعة
كلية التجارة ـ جامعة الاسكندرية

مراجعة

الدكتور/محمد علي محمد أحمد
قسم الإحصاء والرياضة والتأمين
كلية التجارة ـ جامعة الاسكندرية

دار المريخ للنشر

ص. ب : ١٠٧٢٠ ـ الرياض : ١١٤٤٣ ـ تلكس ٤٠٣١٢٩
المملكة العربية السعودية ـ تلفون ٤٦٥٨٥٢٣ ـ ٤٦٤٧٥٣١

ⓒ دار المريخ للنشر ، ١٤١٥ هـ.

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية

طه ، حمدي

مقدمة في بحوث العمليات/ تعريب أحمد حسين علي حسين ؛ مراجعة محمد علي محمد أحمد .

... ص ؛ .. سم

ردمك ٤-٤٠٢-٢٤-٩٩٦٠

١ - بحوث العمليات ٢- البرمجة الخطية أ -حسين ، أحمد حسين (مترجم) ب- أحمد ، محمد علي (مراجع) ج- العنوان

ديوي ١,٤٢٤.. ١٥/١٨٧٧

رقم الإيداع : ١٥/١٨٧٧

ردمك : ٤-٤٠٢-٢٤-٩٩٦٠

حقوق النشر :

Operations Research

by: Hamdy A. Taha

ⓒ دارالمريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، ١٤١٧هـ / ١٩٩٦م

جميع حقوق الطبع والنشر محفوظة لدار المريخ للنشر ـ الرياض

المملكة العربية السعودية، ص. ب ١٠٧٢٠ ـ الرمز البريدي ١١٤٤٣

تلكس ٤٠٣١٢٩ ـ فاكس ٤٦٥٧٩٣٩، هاتف ٤٦٤٧٥٣١ / ٤٦٥٨٥٢٣

لايجوز استنساخ أو طباعة أو تصوير أي جزء من هذا الكتاب

أو إختزانه بأية وسيلة إلا بإذن مسبق من الناشر.

الفصل الثاني
البرمجة الخطية: صياغات وحل بياني
LINEAR PROGRAMMING: FORMULATIONS AND GRAPHICAL SOLUTIONS

ستلاحظ أن هذا الكتاب يبدأ بتغطية مفصلة للبرمجة الخطية (LP). ولايرجع السبب في ذلك الى التمسك بالتقليد المتبع في معظم كتب بحوث العمليات فقط، بل يرجع أيضا إلى حقيقة أن البرمجة الخطية توفر تأسيسا هاما لوضع وتطوير طرق حل نماذج اخرى في بحوث العمليات مثل البرمجة العددية، الاحتمالية، وغير الخطية. هذا بالاضافة إلى تطبيق البرمجة الخطية وبنجاح كبير، بعد ثلاثة عقود من التجارب والفحص والتدقيق، في حل مشاكل تتراوح بين المشاكل التقليدية في الصناعة، القوات المسلحة، الاقتصاد، النقل، والصحة إلى حالات معقدة جدا في العلوم السلوكية والاجتماعية.

ويقدم هذا الفصل مجموعه متنوعة من تطبيقات البرمجة الخطية حيث يتضمن الفصل الحل البياني لمشكلة ذات متغيرين فقط. ويعتبر هذا الحل هو الاساس لشرح عملية الأمثلية التي يتوصل إليها حل نموذج البرمجه الخطية. كما يتضمن الفصل أيضا السؤال الهام الخاص بكيفية تطبيق تحليل الحساسية على الحل الامثل. ويختتم الفصل بإطار للتفسير الاقتصادي للنموذج العام للبرمجه الخطية.

1-2 نموذج برمجه خطية بسيط وحله بيانيا
A SIMPLE LP MODEL AND ITS GRAPHICAL SOLUTION

يقدم هذا القسم البيانات المطلوبة لبناء وحل نموذج رياضي - نموذج برمجة خطية في هذه الحالة. وبداية، يجب على القارىء تركيز الانتباه على افتراضات النموذج والتأثيرات الممكنة لهذه الافتراضات أثناء تنفيذ خطوات حل النموذج، وفي نفس الوقت على القارىء أن يحاول استخلاص نتائج عامة بخصوص كيفية تطبيق الاجراءات المستخدمه في هذا المثال على حالات اخرى.

مثال 2-1-1 (شركة بويات الطلاء) تمتلك شركة مصنعا صغيرا لانتاج بويات طلاء المنازل داخليا وخارجيا وتوزيع الانتاج على تجار الجمله. ويحتاج انتاج البويات الى نوعين

اساسيين من المواد الخام A و B حيث تبلغ الكميات المتاحة من كل منهما يوميا 6 طن، 8 طن على التوالى. ويظهر الجدول الآتى احتياجات انتاج الطن من الطلاء الخارجى وانتاج الطن من الطلاء الداخلى من المادتين الخام A و B.

	احتياجات الطلاء من المواد الخام بالطن		المتاح بالطن
	الخارجي	الداخلي	
مادة خام A	1	2	6
مادة خام B	2	1	8

وقد اظهرت دراسات السوق أن الطلب على الطلاء الداخلي يزيد عن الطلب على الطلاء الخارجي بحد أقصى 1 طن يوميا، كما أظهرت دراسات السوق أيضاً أن الحد الاقصى للطلب اليومي على الطلاء الداخلي هو 2 طن. ويبلغ هامش ربح الطن من الطلاء الخارجي 3000 S في حين يبلغ هامش ربح الطن من الطلاء الداخلي 2000 S.

فما هي الكميات التي يجب انتاجها يوميا من الطلاء الخارجي والداخلي لتعظيم الارباح.

بناء النموذج الرياضي Construction of the Mathematical Model

يمكن البدء في بناء النموذج الرياضي بالاجابة على الثلاثة أسئلة الآتية:

1- ما الذي يحاول النموذج تحديده؟ بعبارة اخرى، ماهي متغيرات variables (مجاهيل) المشكلة؟

2- ماهي القيود constraints التي يجب فرضها على المتغيرات للوفاء بحدود النظام المعبر عنه في النموذج؟

3- ماهو الهدف objective المطلوب تحقيقه لتحديد الحل الامثل من ضمن كل القيم الممكنة feasible للمتغيرات؟

ومن أكثر الطرق فعالية للاجابة على هذه الاسئلة الثلاثة هو إعطاء ملخص لفظى لوصف المشكله كالاتي:

تحاول الشركة تحديد مقادير (بالطن) الطلاء الداخلي والخارجي التي يجب انتاجها لتعظيم (زيادة بقدر الامكان) هامش الربح الاجمالي (بالآف الدولارات) وفي نفس الوقت تستوفى القيود المفروضة على الطلب وعلى استخدام المواد الخام.

تتمثل النقطة الاساسية للنموذج الرياضى في تعريف متغيرات المشكلة أولا، ثم التعبير عن الهدف وعن القيود في صورة دوال (معادلات) رياضية لهذه المتغيرات. وبناء

على ذلك، وبالنسبة للمشكله الخاصة بشركة الطلاء، نجد الآتي :

المتغيرات : حيث أن المطلوب هو تحديد المقادير التي يجب إنتاجها من الطلاء الداخلي والخارجي، اذن يمكن تعريف متغيرات النموذج لتكون :-

x_E = الاطنان المنتجة يوميا من الطلاء الخارجي .

x_I = الاطنان المنتجة يوميا من الطلاء الداخلي .

دالة الهدف : حيث أن الطن من الطلاء الخارجي يحقق هامش ربح 3000 $ والطن من الطلاء الداخلي يحقق هامش ربح 2000 $ ، اذن هامش الربح الاجمالي المتحقق من بيع x_E هو $3x_E$ الف دولار، وهامش الربح الاجمالي المحقق من بيع x_I هو $2x_I$ ألف دولار. وبافتراض أن مبيعات الطلاء الخارجي مستقلة عن مبيعات الطلاء الداخلي، اذن يصبح هامش الربح الاجمالي للشركة مساويا لمجموع هامش الربح المتحقق من بيع الطلاء الخارجي + هامش الربح المتحقق من بيع الطلاء الداخلي .

وبناء على ذلك، اذا افترضنا أن z تمثل هامش الربح الاجمالي (بالآف الدولارات)، أذن يمكن كتابة دالة الهدف رياضيا لتكون $z = 3x_E + 2x_I$. فالهدف هو تحديد القيم (الممكنة) لكل من x_E ، x_I التي ستعظم قيمة z.

القيود : توجد في مشكلة شركة الطلاء قيودا مفروضه على استخدام المادة الخام وعلى الطلب. ويمكن التعبير عن قيد استخدام المواد الخام لفظيا كالآتي :

(استخدامات الطلاء الخارجي والداخلي من المادة الخام) ≥ (الحد الاقصى المتاح من المادة الخام)

ويمكن من هذا التعبير اللفظي كتابة قيود المستخدم من المواد الخام كالآتي :-

(مادة خام A) $x_E + 2x_I \leq 6$

(مادة خام B) $2x_E + x_I \leq 8$

وبالمثل يمكن التعبير عن قيود الطلب لفظيا كالآتي :

(زيادة طلب الطلاء الداخلي على طلب الطلاء الخارجي) ≥ 1 طن يوميا

(الطلب على الطلاء الداخلي) ≥ 2 طن يوميا

ويتم التعبير عن هذه القيود اللفظيه رياضيا، على التوالي، كالآتي :-

$x_I - x_E \leq 1$ (زيادة الطلاء الداخلي على الطلاء الخارجي)

$x_I \leq 2$ (الحد الاقصى للطلب على الطلاء الداخلي)

وهناك قيد ضمني (مفهوم منطقيا) أنه لايمكن أن يكون الانتاج من كل من نوعي الطلاء بالسالب (أي أقل من الصفر). لذلك، يفرض دائما على النموذج *شروط عدم سالبية* non-negativity restrictions التي تكتب كالآتي:

$x_I \geq 0$ (الطلاء الداخلي)

$x_E \geq 0$ (الطلاء الخارجي)

وبناء على ذلك، تمثل القيم المعينة لكل من x_E ، x_I *حلا ممكنا* feasible solution اذا تم استيفاء كل القيود المفروضة على النموذج.

والآن يمكن تلخيص النموذج الرياض لمشكلة شركة الطلاء كالآتي:

حدد الاطنان التي يجب انتاجها من الطلاء الخارجي والداخلي x_I ، x_E بما يحقق:

المطلوب تعظيم (دالة الهدف) $z = 3x_E + 2x_I$

بشرط أن:

$$\begin{aligned} x_E + 2x_I &\leq 6 \\ 2x_E + x_I &\leq 8 \\ -x_E + x_I &\leq 1 \quad \text{(القيود)} \\ x_I &\leq 2 \\ x_E \geq 0, \quad x_I &\geq 0 \end{aligned}$$

◀

ما الـذي يجعل هذا النموذج برمجه خطية؟ يعتبر هذا النموذج برمجة خطية لأن كل دواله (القيود والهدف) تعتبر دوال خطية. وتتضمن صفة الخطية توافر كل من خاصيتي التناسبيه proportionality والتجميع additivity.

1- يتطلب توافر خاصية التناسبية أن مساهمة كل متغير (أي x_E ، x_I) في دالة الهدف أو استخدامه من الموارد المتاحة تتناسب تناسبا مباشرا مع مستوى (قيمة) المتغير. فعلى سبيل المثال، اذا منحت شركة الطلاء خصم كمية قيمته 500$ اذا زادت المبيعات من الطلاء الخارجي عن 2 طن. يترتب على ذلك، أن الطن من الطلاء الخارجي سيحقق هامش ربح 3000$ إذا كانت المبيعات $\geq$ 2 طن، وسيحقق هامش ربح 2500$ إذا كانت المبيعات $<$ 2 طن مما يعني عدم توافر شرط التناسب المباشر مع x_E. لذلك، حتى يكون شرط التناسب متوافرا، يجب أن تكون مساهمة الطن من الطلاء الخارجي في دالة الهدف

$3000 ايا كانت الكميات المباعة من هذا الطلاء.

2- يتطلب توافر خاصية التجميع أن يتم الحصول على قيمة دالة الهدف من الجمع المباشر للمساهمات الفردية للمتغيرات المختلفة. وبالمثل، يجب أن تكون قيمة الجانب الايسر في كل قيد مساوية لمجموع الاستخدام الفردى لكل متغير من المورد المقابل له. فعلى سبيل المثال، في حالة منتجين متنافسين، لن تتوافر خاصية التجميع اذا ترتب على الزيادة في مستوى مبيعات أحدهما تأثيرا عكسيا على مستوى مبيعات الآخر.

تطبيق 2-1-1

تنطبق الامثلة الاتية على النموذج الذي تم شرحه بعالية:

أ ـ أعد كتابة كل من القيود الاتية في ظل الشروط المذكورة:

1- أن الطلب اليومي للطلاء الداخلي يزيد عن الطلب اليومي للطلاء الخارجي بمقدار 1 طن على الاقل

[الاجابة: $x_I - x_E \geq 1$]

2- أن الاستخدام اليومي من المادة الخام A هو 6 طن على الاكثر و 3 على الأقل.

[الاجابة: $x_E + 2x_I \leq 6$ ، $x_E + 2x_I \geq 3$]

3- أن الطلب على الطلاء الداخلي لايمكن أن يكون أقل من الطلب على الطلاء الخارجي.

[الاجابة: $x_I - x_E \geq 0$ أو $x_E - x_I \leq 0$]

ب ـ حدد ما اذا كانت الحلول الآتية تعتبر حلولا ممكنه.

(1) $x_E = 1,\ x_I = 4;$ (2) $x_E = 2,\ x_I = 2;$

(3) $x_E = 3\frac{1}{3},\ x_I = 1\frac{1}{3};$ (4) $x_E = 2,\ x_I = 1;$

(5) $x_E = 2,\ x_I = -1.$

[الاجابة: الحلول 2 ، 3 ، 4 ممكنه، الحلول 1 ، 5 غير ممكنه]

جـ ـ افترض الحل الممكن $x_E = 2$ ، $x_I = 2$ وقم بتحديد:

(1) المقدار العاطل slack (أى غير المستخدم) من المادة الخام A.

[الاجابة: صفـــر].

(2) المقدار العاطل من المادة الخام B.

[الاجابة: 2 طن].

د ـ حدد أفضل حل من ضمن كل الحلول الممكنه في السؤال (ب).

[الاجابة: (2) $z = 10$ ، (3) $z = 12\frac{2}{3}$ ، (4) $z = 8$. اذن الحل رقم (3) هو

الأفضل].

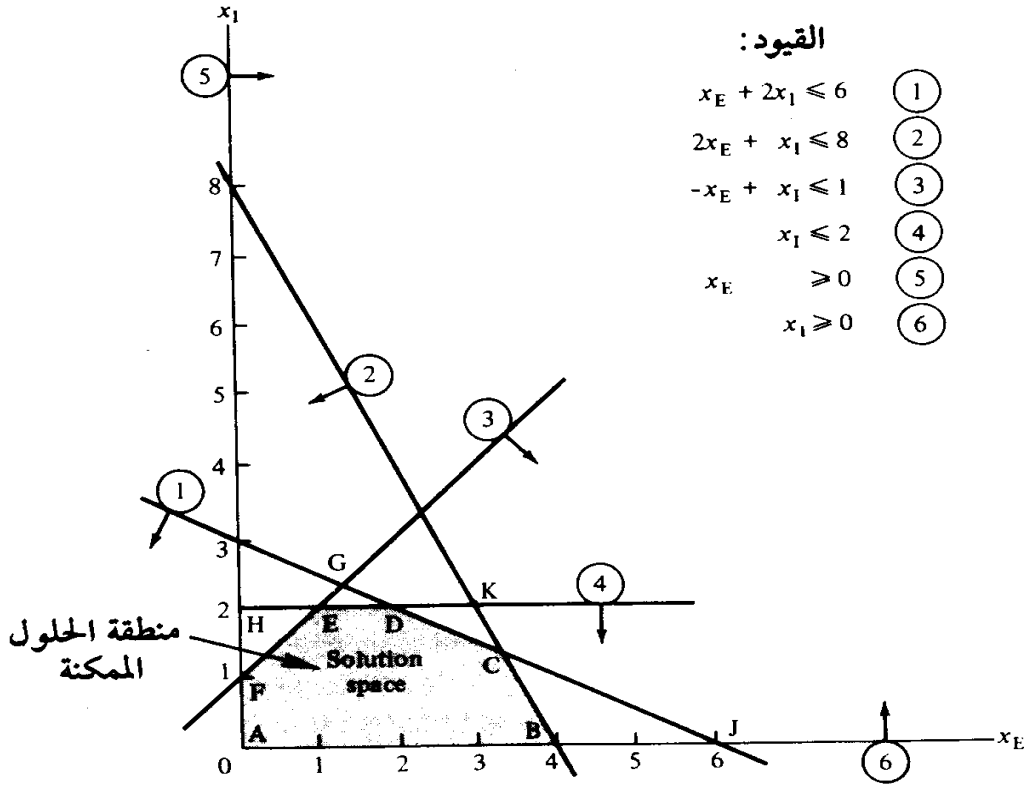
هـ ـ هل يمكنك أن تخمن عدد الحلول الممكنة لمشكلة شركة الطلاء

[الاجابة: هناك عدد لانهائي من الحلول الممكنة. لذلك لايمكن استخدام الاجراءات التي تم اتباعها للاجابة على السؤال (د) حيث توجد الحاجة الى اسلوب أكثر كفاءة كما سيتم شرحه في القسم التالي].

1-1-2 الحل البياني لنماذج البرمجة الخطية Graphical Solution of LP Models

سنقوم في هذا القسم بحل نموذج البرمجة الخطية لشركة الطلاء بالطريقة البيانية لأن المشكلة تحتوي على متغيرين فقط. لاحظ أنه لايمكن حل نموذج البرمجه الخطية بيانيا في حالة وجود أكثر من متغيرين في المشكله. ومع ذلك، يمكننا التوصل إلى استنتاجات عامه من الطريقة البيانية ستخدمنا كأساس لوضع طريقة عامة للحل في الفصل الثالث.

أول خطوة في الحل البياني هي رصد الحلول الممكنه، أو تحديد منطقة الحلول الممكنة feasible solution space التي تفي بكل القيود في وقت واحد كما تظهر في شكل 2-1.

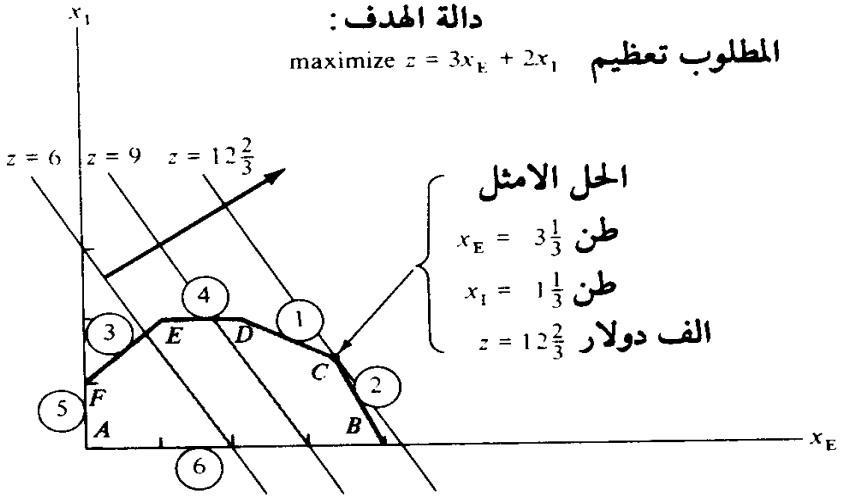


شكل 2-1

لاحظ أن شروط عدم السالبية $x_E \geq 0$ ، $x_I \geq 0$ تحصر كل القيم الممكنه في الربع الاول (والذي يحدد المنطقة أعلى أو على محور x_E. والمنطقة على يمين أو على محور x_I). أما الحيز المحدد بالقيود الاخرى فيتم تحديده بتحويل اشارة القيد ($\leq$) الى (=) لتحويل القيد الى معادلة خط مستقيم. ثم يتم رصد كل خط مستقيم على المستوى x_E ، x_I. وتتم عملية رسم الخط المعين عن طريق افتراض أن $x_I = 0$ ومنها يتم تحديد قيمة x_E على المحور x_E ، ثم افتراض أن $x_E = 0$ ومنها يتم تحديد قيمة x_I على المحور x_I ، ثم بإيصال النقطة على المحور x_E مع النقطة على المحور x_I ينتج الخط الممثل للقيد المعين.

لاحظ في الشكل 2-1 أن اتجاه السهم الخاص بكل خط يمثل المنطقة الممكنة لكل قيد. ينتج عن ذلك منطقة الحلول الممكنة لمشكلة شركة الطلاء وهي المنطقة المظلله ABCDEF (تأكد بنفسك أن الاسهم على كل خط تمثل بالفعل القيد المقابل). وتعتبر كل نقطة داخل أو على حدود منطقة الحلول الممكنة مستوفية لكل القيود وبالتالي تعتبر حلا ممكنا. وعلى الرغم من وجود عدد لانهائي من الحلول الممكنة، إلا أنه يمكن تحديد الحل الامثل optimum solution من خلال تحديد الاتجاه الذي تزيد فيه داله الهدف $3x_E + 2x_I$ كما في الشكل 2-2. ويتم رسم الخطوط المتوازية الممثله لدالة الهدف من خلال افتراض قيم متزايدة للدالة $z = 3x_E + 2x_I$ لتحديد كل من الانحدار والاتجاه الذي يزيد عنده هامش الربح الاجمالي (دالة الهدف). وقد استخدمت القيم الافتراضية $z = 6$ ، $z = 9$ في الشكل 2-2 (تحقق بنفسك من صحة هذه الأرقام).

ولايجاد الحل الامثل (أقصى ربح) يجب أن نحرك خط الربح في اتجاه اليمين إلى أبعد (أقصى) نقطة تمس منطقة الحلول الممكنة. ويظهر الشكل 2-2 أن هذا الحل الأمثل يوجد عند النقطة C. وحيث أن النقطة C تقع عند تقاطع الخطين 1 ، 2 (انظر شكل



شكل 2-2

1-2) ، اذن يمكن تحديد قيمة كل من x_E ، x_I بحل المعادلتين التاليتين جبريا في وقت واحد (آنيا) :

$$x_E + 2x_I = 6$$
$$2x_E + x_I = 8$$

وبحل هاتين المعادلتين ينتج أن $x_E = 3\frac{1}{3}$ ، $x_I = 1\frac{1}{3}$. وذلك يعنى أن الحل الأمثل يتطلب انتاج $3\frac{1}{3}$ طن من الطلاء الخارجي ، $1\frac{1}{3}$ طن من الطلاء الداخلي . يترتب على ذلك تحقيق اقصى ربح :

الف دولار $z = 3(3\frac{1}{3}) + 2(1\frac{1}{3}) = \$12\frac{2}{3}$ thousand

تطبيق 2-1-2

أ ـ حدد منطقة الحلول الممكنة والحل الأمثل لمشكلة شركة الطلاء مع التغيرات الاتية بافتراض أن كل تغيير يحدث بصورة مستقلة وأنه يحل محل الشرط المقابل له في النموذج وأن باقى الشروط لايحدث فيها أي تغيير (إرجع الى شكل 2-1 لتحديد الاجابة والتحقق منها) .

(1) أن الحد الأقصى للطلب على الطلاء الداخلي 3 طن يوميا .
[الاجابة : منطقة الحلول الممكنة ABCGF ، ويبقى الحل الامثل عند C].

(2) أن الطلب اليومي على الطلاء الداخلي 2 طن يوميا على الأقل .
[الاجابة : منطقة الحلول الممكنة DEG ، والحل الامثل $x_E = x_I = 2$ ، $z = 10$ عند النقطة D].

(3) أن الطلب على الطلاء الداخلي يزيد بمقدار طن واحد على الطلب على الطلاء الخارجي .
[الاجابة : منطقة الحلول ستكون على الخط EF ، والحل الامثل $x_E = 1$ ، $x_E = 2$ ، $z = 7$ عند النقطة E].

(4) أن المتاح يوميا من المادة الخام B هو 8 طن الأقل .
[الاجابة : منطقة الحلول الممكنة BCJ ، والحل الامثل $x_E = 6$ ، $x_E = 0$ ، $z = 18$ عند النقطة J].

(5) أن المتاح يوميا من المادة الخام B هو 8 طن على الأقل ، وأن الطلب اليومي على الطلاء الداخلي يزيد عن الطلب اليومي على الطلاء الخارجي بمقدار طن واحد على الاقل .
[الاجابة : لاتوجد منطقة حلول ممكنة للمشكلة] .

ب ـ حدد الحل الامثل في الشكل 2-2 اذا تغيرت دالة الهدف لتصبح :

(1) $z = 3x_E + x_I$

[الاجابة : $x_E = 4$ ، $x_E = 0$ عند النقطة B]

(2) $z = 3x_E + 1.5x_I$

[الاجابة : أي نقطة على الخط الذي يصل النقطه B بالنقطة C]

(3) $z = x_E + 3x_I$

[الاجابة : $x_E = 2$ ، $x_I = 2$ عند النقط E].

(4) في الحالة "c" كانت الاجابة تعني وجود أكثر من حل أمثل واحد. ماهي قيمة دالة الهدف عند هذه الحلول المثلى؟

[الاجابة : تبقى قيمة دالة الهدف كما هى 12 الف. ويطلق على مثل هذه الحلول البدائل المثلي لانها تعطى نفس القيمة المثلى لدالة الهدف.

تكشف النقطة (ب) في التطبيق 2-1-2 عن ملاحظة هامة وهى أن الحل الامثل يتحدد دائما عند أحد الاركان الممكنة (أو النقاط عند أطراف منطقة الحلول الممكنة) A ، B ، C ، D ، و E في شكل 2-2. ويعتمد اختيار ركن معين في المقام الاول على إنحدار (معاملات Coefficient) دالة الهدف. لاحظ أنه حتى في الحالة (2) ، عندما لم يكن الحل الامثل عند ركن من الاركان، كانت كل الحلول البديلة في هذه الحالة تنحصر في الخط الواصل بين الركن B و الركن C.

وسنبين في الفصل الثالث أن هذه الملاحظة المشار اليها بعالية ستكون هي الفكرة الاساسية التي يقوم عليها حل البرامج الخطية بصفة عامة. وبناء على ذلك، يمكن من الآن تجاهل كل نقاط الحلول الممكنة اللانهائية داخل منطقة الحلول الممكنة والتركيز فقط على عدد محدود من الحلول وهي النقاط عند اركان منطقة الحلول الممكنة والتي تعطى نتائج لدالة الهدف افضل من أي نقطة اخرى داخل المنطقة.

2-1-2 تحليل الحساسية أو مابعد الامثلية: تقديم أولى

SENSITIVITY OR POSTOPTIMAL ANALYSIS: AN ELEMENTARY PRESENTATION

يقصد بتحليل الحساسية الاجراء الذي يتم تنفيذه عادة بعد التوصل إلى الحل الامثل. وهو يحدد مدى حساسية الحل الامثل تجاه حدوث أي تغيرات محدودة في معلمات النموذج الأصلي. فعلى سبيل المثال، يمكن في نموذج شركة الطلاء دراسة التغيرات في الحل الامثل نتيجة للزيادة أو النقص في الطلب و/ أو في المواد الخام المتاحة. كما يمكن أيضاً معرفة التغير في الحل الامثل نتيجة للتغيرات في اسعار السوق.

ويعتبر هذا النوع من التحليل جزءاً مكملا لحل نماذج البرمجه الخطية واي نموذج لبحوث عمليات. فهو يعطى النموذج صفة الحركية التي تسمح للمحلل أن يختبر التغيرات في الحل الامثل التي يمكن أن تحدث نتيجة لتغيرات مستقبلية ممكنه في معلمات النموذج. وتعتبر خاصية الحركية في النماذج هي الصفة المميزة لمعظم أنشطة الاعمال. فعدم وجود إجراء لتحديد مدى إستجابة الحل الامثل للتغيرات في قيم المتغيرات والقيود، سيجعل الحل الحالى للنموذج متقادما وغير صالح للتطبيق حتى قبل أن تتاح الفرصه لتنفيذه وذلك لأنه من الممكن حدوث تغيرات في قيم المتغيرات والقيود تؤثر على بقاء الحل الحالى حلا أمثلا.

وسنستخدم في هذا القسم الطرق البيانية لتنفيذ تحليل الحساسية. وعلى الرغم من أن الشرح سيكون مبسطا الا أنه سيؤدى الى استنتاجات عامة تستخدم في وضع طرق قوية ذات كفاءة لإجراء تحليل الحساسية في الفصلين الثالث والخامس.

مشكلة الحساسية الأولى : ماهو مقدار الزيادة أو النقص في الموارد؟

من المنطقى بعد تحديد الحل الأمثل أن يتم دراسة التغيرات الممكنة في الحل الامثل التي يمكن أن تحدث نتيجة للتغيرات في مستويات الموارد المستخدمة في القيود. وعلى وجه الخصوص، سنهتم بنوعين من التحليل :

1 - ماهو مقدار الزيادة في الموارد التي يترتب عليها تحسن في القيمة المثالية لدالة الهدف z ؟

2 - ماهو مقدار النقص الذي يمكن أن يحدث في المورد دون أن يؤثر ذلك على أمثلية الحل الحالي؟

وحيث أنه عادة ما يوضع مستوى المورد (أى المتاح من المورد) في الجانب الايمن من القيد، فعادة مايشار الى هذا التحليل باسم تحليل حساسية الجانب الأيمن.

ويجب قبل أن نجيب على هذه الاسئلة أن نصنف أولا قيود البرمجه الخطية إلى قيود محدده (بكسر الدال) binding وقيود غير محددة non binding حيث يجب أن يمر القيد المحدد خلال نقطة الحل الامثل والا سيعتبر قيد غير محدد. ففي الشكل 2-1 الخاص بمشكلة شركة الطلاء سنجد أن القيدين 1 ، 2 هما المحددان للحل الامثل، وهما القيدان الخاصان بالمتاح من المادتين الخام A ، B.

ويعتبر القيد المحدد من الموارد النادرة scarce resource لأنه سيكون مستغلا بالكامل. لذلك سيتركز الاهتمام في تحليل حساسية الجانب الأيمن على مقدار الزيادة في الموارد النادرة التي تؤدى الى تحسن الحل. أما القيد غير المحدد فلن يكون مستغلا

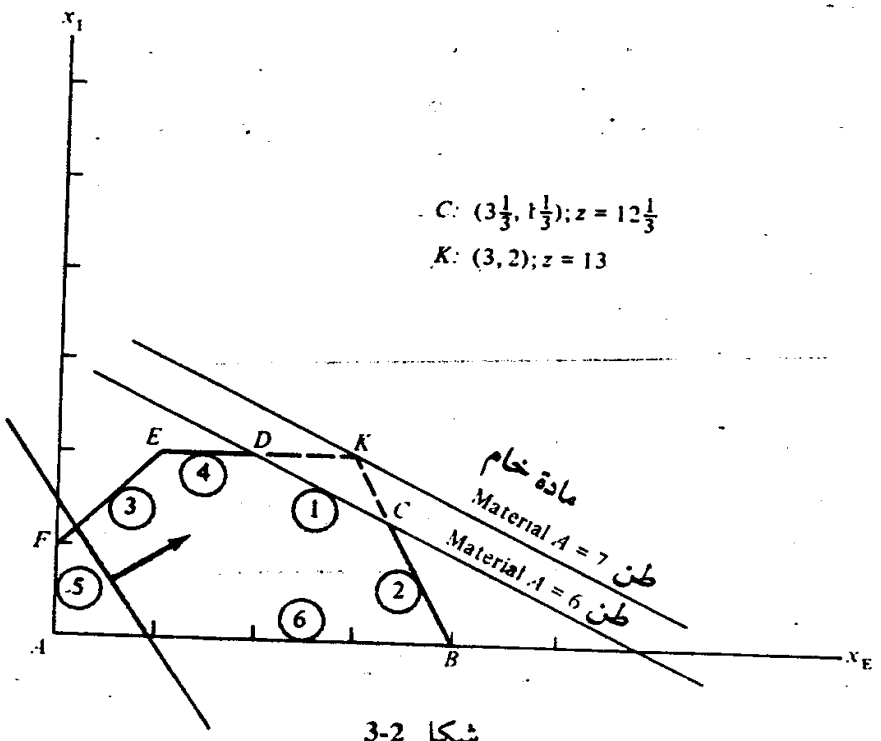
بالكامل، بل سيكون هناك جزء عاطل (غير مستغل) من القيد. لذلك، سيتركز الاهتمام أيضا على مقدار النقص في هذه الموارد الوافرة abundant resource دون التأثير على أمثلية الحل الحالي. وتظهر أهمية هذا النوع الثاني من التحليل في الحالات التي يمكن فيها تحويل الفائض من الموارد الوافرة إلى الموارد النادرة أو استخدام الموارد الوافرة في أنشطة اخرى.

وقد يتساءل القارىء عن سبب عدم دراسة آثار النقص في الموارد النادرة والزيادة في الموارد الوافرة. والاجابة أن دراسة أثر الزيادة في الموارد الوافرة تعتبر غير مجدية وذلك لأن هذه الزيادة سيترتب عليها جعل الموارد الوافرة أكثر وفرة دون أي تأثير على الحل الحالي. ومن ناحية اخرى، يمكن أن يكون هناك جدوى من دراسة النقص في الموارد النادرة في حالة توقع حدوث نقص في العرض المتاح منها في المستقبل. وكل ما يمكن قوله الآن هو أن هذا النقص لن يؤدى إلى التحسن في دالة الهدف، وسنناقش هذه النقطة بالتفصيل في الفصل الرابع.

وبالعودة الى موضوع المناقشة نجد أن القيدين (1) ، (2) الممثلين للمتاح من المواد الخام A ، B يمثلان موارد نادرة. خذ في الاعتبار أولا المادة A حيث يظهر شكل 2-3 أنه في حالة زيادة المتاح من هذه المادة فسوف يتحرك الخط (1) CD صاعدا موازيا لنفسه حتى يدخل المثلث CDK ضمن منطقة الحلول الممكنة (لاحظ أن جانبى المثلث CK و DK يعتبرا امتداداً للقيدين (2) ، (4). وعند الوصول الى النقطة K سيصبح القيدان (2) ، (4) من ضمن القيود المحددة (أي المستغلة بالكامل) مع تحقق الحل الامثل عند النقطة K وتصبح منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة ABKEF. لاحظ أن القيد (1) الخاص بالمادة A سيصبح قيد "زائد redundant" غير مؤثر عند النقطة K حيث أن أي زيادة اخرى في المتاح من المادة A لن يكون لهاأي تأثير على منطقة الحلول الممكنة ولا على الحل الامثل[1]. لذلك يجب أن لايزيد المتاح من المادة A عن المستوى الذي يجعل القيد (1) قيداً زائداً، أي لايتجاوز النقطة K. ويتم تحديد هذا المستوى كالاتي: أولا، حدد النقطة K التي تقع عند تقاطع الخطين (2) ، (4)

$$2x_E + x_1 = 8 \qquad (\text{خط } 2)$$

(١) لاحظ الفرق بين قيد وافر abundant وقيد زائد redundant. فالقيد الزائد لايؤثر على النموذج ككل بمعنى أن وجوده يستوى مع عدم وجوده. ولن يكون له أي تأثير على منطقة الحلول الممكنة ولاعلى الحل الامثل أي يمكن حذفه تماما من النموذج. أما القيد الوافر فهو يؤثر على منطقة الحلول الممكنة ولكن لايؤثر بالضرورة على الحل الامثل. لذلك لايمكن حذف هذا القيد من النموذج والا اصبح غير معبر عن النظام الذي يمثلة النموذج.



شكل 2-3

(خط 4) $x_I = 2$

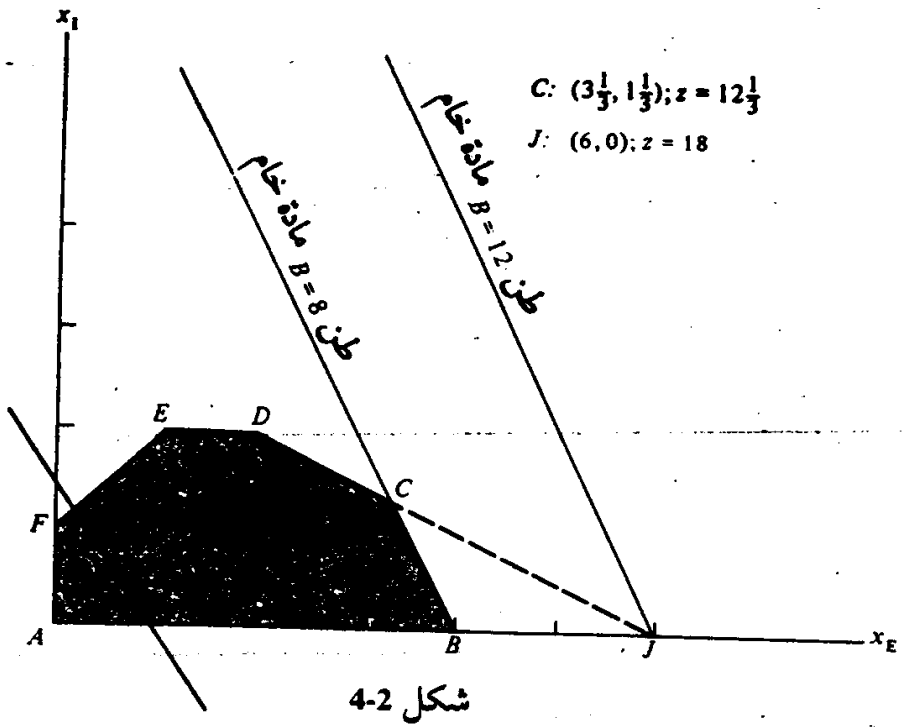
وبحل المعادلتين نحصل على $x_E = 3$ ، $x_I = 2$ ثم بإحلال قيم المتغيرات عند النقطة K في القيد (1) نحصل على أقصى كمية مسموح بها من المادة A قبل أن يصبح القيد (1) قيد زائداً وهي :

$$x_E + 2x_I = 3 + 2(2) = 7 \text{ طن}$$

ويظهر الشكل 2-4 حالة زيادة القيد (2) الذي يمثل المورد النادر المادة الخام B حيث تظهر النقطة J الحل الامثل الجديد عند تقاطع الخط (6) مع الخط (1). ويلاحظ أن الحل عند النقطة J هو $x_E = 6$ ، $x_I = 0$. ويمكن التوصل إلى أقصى كمية مستخدمه من المادة B بالتعويض في معادلة القيد (2) كالآتي :

$$2x_E + x_I = 2(6) + 1(0) = 12 \text{ طن}$$

ونتجه الان الى دراسة أثر النقص في القيود غير المحددة (أي التي يوجد فيها وفر). فالقيد (4) يمثل الحد الاقصى للطلب اليومي على الطلاء الداخلي $x_I \leq 2$. وقد اظهر شكل 2-2 أنه يمكن تخفيض الخط (4) DE حتى يمر خلال النقطة C دون أن يؤثر على الحل. وحيث أن الحل عند النقطة C هو $x_E = 3\frac{1}{3}$ ، $x_E = 1\frac{1}{3}$ ، اذن يمكن تخفيض الحد الاقصى للطلب على الطلاء الداخلي ليصبح $x_E = 1\frac{1}{3}$ دون تغيير الحل الامثل الحالي عند النقطة C.



شكل 2-4

وندرس الآن القيد (3) EF الذى يمثل العلاقة بين الطلب على الطلاء الداخلي وبين الطلب على الطلاء الخارجى $-x_E + x_I \leqslant 1$. لاحظ أنه يمكن تخفيض الجانب الأيمن من القيد (3) EF حتى يمر خلال النقطة C وعندها تصبح قيمة القيد (3) كالآتي:

$$-x_E + x_I = (-3\tfrac{1}{3}) + (1\tfrac{1}{3}) = -2$$

أي أن $-x_E + x_I \leqslant -2$، والتي تعادل $x_E - x_I \geqslant 2$. وبالتالي لن يتاثر الحل الامثل الحالي عند النقطة C إذا زاد الطلب على الطلاء الخارجي عن الطلب على الطلاء الداخلي بمقدار 2 طن أو أكثر.

ويمكن تلخيص كل النتائج السابقة في الجدول الآتي:

المورد	النوع	اقصى تغير فى مستوى المورد (بالطن)	اقصى تغير في الربح z (بالاف الدولارات)
1	نادر	$7 - 6 = +1$	$13 - 12\frac{2}{3} = +\frac{1}{3}$
2	نادر	$12 - 8 = +4$	$18 - 12\frac{2}{3} = +5\frac{1}{3}$
3	وافر	$-2 - 1 = -3$	$12\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 0$
4	وافر	$1\frac{1}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$	$12\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 0$

تطبيق 2-1-3

(أ) بالرجوع الى شكل 2-1 قم بتحديد القيود المحددة، وغير المحددة، والزائدة في ظل كل من الشروط الاتية مع الرجوع ايضا الى الجدول السابق:

(1) زيادة المورد (2) إلى حدة الاقصى (= 12 طن).

[الاجابة: قيد (2) زائد، (1)، (6) محددين، القيود الاخرى غير محددة].

(2) نقص المورد (3) الى حده الادنى.

[الاجابة: قيود (1)، (4)، (5) زائدة، (2)، (3) محددين، (6) غير محدد].

(3) نقص المورد (4) إلى حده الادنى

[الاجابة: (1) زائد، (2)، (4) محددين، كل القيود الاخرى غير محددة]

(ب) أفترض في شكل 2-3 أن القيد (1) الخاص بالمادة الخام A أصبح $2x_E + 3x_I \leqslant 10$ بدلا من $x_E + 2x_I \leqslant 6$ مع بقاء كل المعلومات الاخرى على حالها. حدد الحل الأمثل الذي سينتج عن ذلك مع تحديد أقصى زيادة مسموح بها في المورد A مع الزيادة في الربح z.

[الاجابة: الحل الامثل الجديد $x_E = 3\frac{1}{2}$، $x_I = 1$ و $z_E = 12\frac{1}{2}$، ويمكن أن تزيد A من 10 إلى 12 طن مع زيادة z من $12\frac{1}{2}$ الى 13 الف دولار].

مشكلة الحساسية الثانية: ماهو المورد الذي يجب زيادته؟

درسنا في المشكلة الأولى تأثير الزيادة في الموارد النادرة (القيود المحددة). والآن المطلوب معرفة ماهي الموارد التي تأخذ الاولوية الأولى عند تخصيص الاموال بافتراض أن العرض المتاح من الأموال محدود كما هو الحال في معظم الحالات الاقتصادية. ويوفر تحليل البرمجة الخطية هذه المعلومات من خلال تحديد القيمة المضافه (الزيادة في قيمة دالة الهدف) نتيجة لزيادة المورد المعين بوحدة واحدة. ويتم التوصل إلى هذه المعلومات مباشرة من الجدول الذي يلخص حساسية الطرف الايمن والمعطى في نهاية المشكلة الاولى.

بفرض أن y_i تمثل القيمة المضافة للهدف مقابل وحدة إضافية من المورد i، إذن يتم تحديد y_i من المعادلة

$$y_i = \frac{\text{أقصى تغير في قيمة z المثلى}}{\text{أقصى زيادة مسموح بها في المورد i}}$$

فبالنسبة للقيد (1) الخاص بالمادة الخام A في المثال الخاص بشركة الطلاء نجد أن الجدول الملخص يظهر أن

الف دولار لكل طن من A $y_1 = \frac{13 - 12\frac{2}{3}}{7 - 6} = \frac{1}{3}$

وبناء على ذلك يمكن تلخيص القيمة المضافة للهدف (الزيادة في الربح) نتيجة لزيادة كل مورد بوحدة واحدة كالاتي:

المورد	النوع	قيمة y_i (الف دولار / طن)
1	نادر	$y_1 = 1/3$
2	نادر	$y_2 = 4/3$
3	وافر	$y_3 = 0$
4	وافر	$y_4 = 0$

وتبين هذه المعلومات أن المورد 2 الخاص بالمادة الخام B يجب أن يحصل على الاولوية الأولى في تخصيص الاموال، يتبعه المورد (1) الخاص بالمادة الخام A. ولا يجب زيادة الموارد الوافرة (3) ، (4) كما هو متوقع.

تطبيق 4-1-2

افترض في نموذج شركة الطلاء أن القيد (1) الخاص بالمادة الخام A قد تغير من $x_E + 2x_I \leq 6$ إلى $2x_E + 3x_I \leq 10$ مع بقاء كل المعلومات الاخرى على حالا. احسب y_i لكل الموارد.

[الاجابة: $y_1 = {}^1/_4$ ؛ $y_2 = {}^5/_4$ ؛ $y_3 = y_4 = 0$].

مشكلة الحساسية الثالثة: ماهو مقدار التغير المسموح به في معاملات دالة الهدف؟

يمكن أن يؤثر التغير في معاملات دالة الهدف على ميل (انحدار) slope الخط المستقيم الذي يمثلها. وقد رأينا في القسم 2-1-1 أن إختيار ركن من اركان منطقة الحلول الممكنه كحل أمثل يعتمد أساسا على انحدار دالة الهدف. ويعنى هذا أنه يمكن أن تؤدى التغيرات في معاملات دالة الهدف إلى تغيير مجموعة القيود المحددة ومن ثم تغيير حالة المورد المعين (وافر أو نادر). لذلك يمكن أن يتضمن تحليل الحساسية لمعاملات الهدف الحالات الآتية:

1- ماهو مقدار التغير (زيادة أو نقص) الذي يمكن أن يحدث في المعامل دون أن يسبب ذلك تغيرا في الحل الامثل الحالي؟

2- ماهو مقدار التغير الذي يجب أن يحدث في المعامل ليغير حالة المورد المعين من وافر إلى نادر أو العكس بالعكس؟

وسوف نستخدم النموذج الخاص بشركة الطلاء لشرح الاجابة على هذه الأسئلة. ولمعرفة كيف أن التغير في معاملات دالة الهدف يمكن أن يؤثر على الحل الامثل، افترض أن c_E ، c_I هما هامش الربح للطلاء الخارجي والطلاء الداخلي على التوالي. وعليه يمكن كتابة دالة الهدف كالاتي:

$$z = c_E x_E + c_I x_I$$

ويظهر الشكل 2-5 أنه كلما زادت c_E أو نقصت c_I فسوف تدور دالة الهدف z في نفس اتجاه عقارب الساعه (البؤرة عند C). من ناحية أخرى، يؤدى النقص في c_E أو الزيادة في c_I إلى دوران دالة الهدف z في عكس اتجاه عقارب الساعة. ولذلك ستصبح النقطة C مثلى طالما أن ميل z يتغير بين ميل القيدين (1) ، (2). فعندما يتطابق ميل z مع القيد (1) فسيظهر ركنان أمثلان بديلان هما C و D. وبالمثل، عندما يتطابق ميل دالة الهدف مع القيد (2) فسنحصل على ركنين أمثلين بديلين هما B و C (يعني الحل البديل أن قيمة z تبقى كما هي حتى لو تغيرت قيمة المتغير. أنظر إلى الجزء (ب ـ 4) من التطبيق 2-1-2). وسوف يترتب على أي تغير صغير خارج المدى الذي تم تحديده لـ c_E ظهور حل جديد عند B أو عند D.

وسوف نشرح هذا الإجراء من خلال تحديد مدى التغير المسموح به في c_E بحيث يبقى الحل الامثل عند C مع افتراض بقاء قيمة c_I عند قيمتها الحالية وهي 2. ويظهر الشكل 2-5 أنه يمكن أن تزيد c_E حتى تتطابق z مع (2) أو تنقص حتى تتطابق z مع (1). ولذلك يمكن تحديد أدنى قيمه واقصى قيمة لـ c_E من خلال مساواة ميل z مع ميل كل من (1) ، (2) على التوالي. وحيث أن ميل z هو $c_E/2$ ، وميل كل من (1) ، (2) هو $^1/_2$ ، $^2/_1$ على التوالي، اذن يمكن تحديد أدنى قيمة لـ c_E من خلال

أدنى قيمة $\quad \text{minimum } c_E = 1 \quad \text{or} \quad \frac{c_E}{2} = \frac{1}{2}$

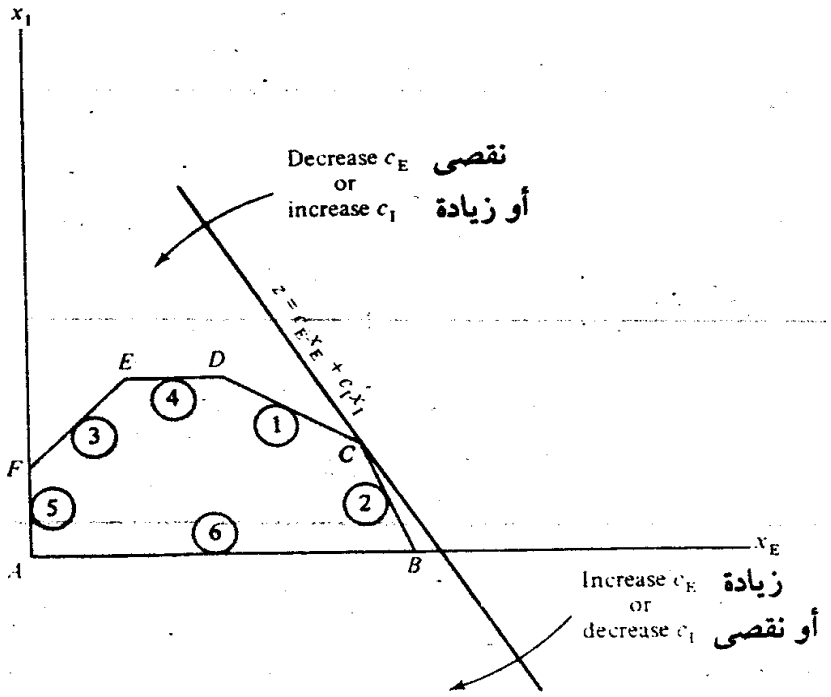
وبالمثل، يمكن تحديد أقصى قيمة لـ c_E من خلال

أقصى قيمة $\quad \text{maximum } c_E = 4 \quad \text{or} \quad \frac{c_E}{2} = \frac{2}{1}$

أي أن المدى الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة c_E مع بقاء النقطة C كحل أمثل وحيد unique optimum هو:

$$1 \le c_E \le 4$$

وعندما يكون $c_E = 1$ ، فيكون الحل الامثل إما عند C أو عند D. أما إذا إنخفضت c_E عن 1 فسوف ينتقل الحل الامثل إلى D. ويمكن اعطاء نفس التفسير عندما تكون $c_E = 4$ أو تزيد عن 4.



شكل 2-5

ويمكننا الآن أن نرى أنه إذا انخفضت c_E عن 1 فسيصبح المورد 2 مورد وافر في حين يصبح المورد 4 موردا نادرا. وبالعودة إلى مشكلة شركة الطلاء، فهذا يعني أنه إذا إنخفض هامش ربح الطن من الطلاء الخارجي إلى أقل من 1000$ فسيكون من الاربح انتاج الحد الاقصى من الطلاء الداخلي (بمعنى أن $x_I = 2$). وفي هذه الحالة سينخفض المستخدم من المادة الخام B (قيد 2) وبالتالي يصبح المورد 2 وافراً. ويمكن استخلاص نفس النتيجة إذا زادت c_E عن 4.

تطبيق 5-1-2

(أ) في الشكل 2-5 ، أوجد مدى التغير في c_I الذي سيجعل الحل الامثل كما هو عند النقطة C مع افتراض ثبات قيمة c_E عند 3.

[الاجابة : $^3/_2 < c_I < 6$].

(ب) حدد في الجزء (أ) النقاط المثلى عندما تزيد c_I عن حدها الاقصى.

[الاجابة : النقطة D]

(جـ) أفترض أن دالة الهدف المعطاه كانت $z = 3x_E + x_I$ بدلا من $z = 3x_E + 2x_I$ ، فسيكون الحل الامثل الجديد عند B حيث $x_E = 4$ ، $x_I = 0$. ويعنى هذا أنه لن يكون هناك انتاج من الطلاء الداخلي. ماهو مقدار التغير الذي يجب أن يحدث

في هامش ربح الطن من الطلاء الخارجي حتى يصبح الطلاء الداخلي مربحا مقارنة بالخارجي؟

[الاجابة: انخفاض c_E من 3000$ إلى 2000$ على الأقل].

قدمت مشاكل الحساسية الثلاثة السابقة الأفكار الأساسية لتحليل مابعد الحل الأمثل. وسيقدم الفصل الرابع عرضا متكاملا للموضوع كما هو مطبق مع المشكلة العامة للبرمجة الخطية.

2-2 صياغات البرمجة الخطية LP FORMULATIONS

نقدم في هذا القسم نموذجين للبرمجه الخطية. وسوف نلاحظ سهولة تحديد متغيرات القرار في هذين المثالين. وسوف نقدم فيما بعد، في قسم 2-3، صياغات اخرى تحتاج إلى مجهود أكبر في عملية تحديد واستخدام متغيرات القرار.

مثال 2-2-1 (سياسة الاقراض في البنك). بفرض أن هناك مؤسسة مالية (بنك) تريد صياغة سياستها الاقراضية للربع سنة القادم. وقد خصص مبلغ 12$ مليون لهذا الغرض. وتمنح القروض لانواع مختلفة من العملاء. ويتضمن الجدول الاتي الانواع المختلفة من القروض، ومعدل الفائدة على هذه القروض، وإحتمال الديون المعدومة كما تم تقديره من الخبرة السابقة:

نوع القرض	معدل الفائدة	احتمال الديون المعدومه
شخصى	.140	.10
سيارات	.130	.07
سكنى	.120	.03
مزارع	.125	.05
تجارى	.100	.02

ويفترض أنه لن يتم تحصيل الديون المعدومه وبالتالي لن تكون هناك فائدة عليها. وتتطلب المنافسة بين البنك وبين المؤسسات المالية الاخرى في نفس المنطقة تخصيص 40% على الاقل من مجموع الاموال الى القروض الزراعية والتجارية. ولمساعدة العمران السكنى في المنطقة فيجب أن تكون القروض السكنية 50% على الاقل من مجموع القروض الثلاثة: الشخصية، السيارات، والسكنية. ويرغب البنك بصفة عامة في أن لاتزيد نسبة الديون المعدومه على كل القروض عن 04.

النموذج الرياضى Mathematical Model

يمكن تحديد متغيرات النموذج كالآتي :

x_1 = القروض الشخصية (بملايين الدولارات)

x_2 = قروض السيارات

x_3 = قروض اسكان

x_4 = قروض المزارع

x_5 = قروض تجارية

ويهدف البنك إلى تعظيم العائد من سياسة الاقراض والمتمثل في الدخل المحقق من الفائدة على القروض مطروحا منه الخسارة نتيجة الديون المعدومه . وحيث أنه لن يتم تحصيل الديون المعـدومه (أى أصل القرض + فائدته) فيمكن كتابة دالة الهدف كالاتي :ـ

المطلوب تعظيم

$$z = .14(.9x_1) + .13(.93x_2) + .12(.97x_3) + .125(.95x_4) + .1(.98x_5) - .1x_1 - .07x_2 - .03x_3 - .05x_4 - .02x_5$$

وبعد تبسيط هذه الدالة تصبح :

المطلوب تعظيم $z = +.026x_1 + .0509x_2 + .0864x_3 + .06875x_4 + .078x_5$

ويوجد للمشكلة خمسة قيود :ـ

(1) المبلغ الاجمالي

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

(2) القروض الزراعية والتجارية

$$x_4 + x_5 \geq .4 \times 12$$

أو

$$x_4 + x_5 \geq 4.8$$

(3) القروض السكنية .

$$x_3 \geq .5\,(x_1 + x_2 + x_3)$$

(4) قيد الديون المعدومة

$$\frac{.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq .04$$

أو

$$.06x_1 + .03x_2 - .01x_3 + .01x_4 - .02x_5 \leq 0$$

(5) شرط عدم السالبية

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

مثال 2-2-2 (استخدام وتطوير الاراضى) تمتلك احدى الشركات العقارية 800 فدان من الاراضى على بحيرة طبيعية في وسط احدى المدن. ولم يكن هناك في الماضى أيه اجراءات تنظم الانشاءات الجديدة حول البحيرة. وقد امتلأ شاطىء البحيرة في الوقت الحاضر بمنازل لقضاء العطلات. وبسبب عدم وجود صرف صحى في المنطقة يتم التصريف في حاويات تنبعث منها روائح كريهة ترتب عليها تلوث في مياه الشرب. ولحماية مياه الشرب من أي تدهور آخر قررت أمانة المدينة أن تضع قيودا مشدده على كل الانشاءات الجديده:

1- لايتم تشييد إلا المساكن التي تسع لعائلة واحدة، ولاثنين، ولثلاثة فقط على أن يكون عدد المساكن التي تسع لعائلة واحدة 50% على الاقل من المجموع.
2- ولتحديد عدد حاويات الصرف الصحى لابد من وجود مساحات 2، 3، و4 أفدنة على الاقل للمساكن التي تسع لعائلة واحدة، ولاثنين، ولثلاثة على التوالي.
3- يجب إنشاء متنزهات مساحة كل منها فدان على الاقل بمعدل متنزة لكل 200 عائلة.
4- وللمحافظة على بيئة البحيرة، لايصرح بعمل مضخات مياه جوفية للاستخدام السكنى أو للحدائق.

ويدرس رئيس الشركة العقارية امكانية تطوير الـ 800 فدان التي تمتلكها الشركة حول البحيرة. وسوف تتضمن الانشاءات الجديدة مساكن لعائلة واحدة، ولأثنين، ولثلاثة. وقد قدر أن حوالى 15% من المساحة سوف تستهلك في الشوارع والمنافع العامة. كما قدر أيضاً ان العائد من الوحدات السكنية المختلفة سيكون كالاتي:

الوحدة السكنية	واحدة	لاثنين	لثلاثة
العائد للوحدة $	10,000	15,000	20,000

وستتناسب تكلفة توصيل خدمة المياه مع عدد الوحدات التي سيتم إنشاؤها. وقد اشترطت أمانة المدينة أنه يجب تحصيل ما لا يقل عن 100,000 $ حتى يكون المشروع مجدى إقتصاديا. يضاف إلى ذلك، أن التوسع في نظام المياه اكثر من طاقته الحالية لن يتعدى 200,000 جالون في اليوم اثناء فترات الذروة. وتلخص البيانات الاتية تكلفة توصيل خدمة المياه واستهلاك المياه المفترض للعائلة متوسطة الحجم.

الوحدة السكنية	واحده	لاثنين	لثلاثة	للمتنزهات
خدمة المياه تكلفة الوحدة ($)	1000	1200	1400	800
استهلال المياه للوحدة (جالون/ يوم)	400	600	840	450

النموذج الرياضي :

يجب أن تقرر الشركة ماهو عدد الوحدات التي يجب انشاؤها من كل نوع من انواع السكن مع عدد المتنزهات التي تطلبتها أمانة المدينة . افترض أن :-

x_1 = عدد الوحدات السكنية لعائلة واحدة .

x_2 = عدد الوحدات السكنية لعائلتين .

x_3 = عدد الوحدات السكنية لثلاث عائلات :

وبذلك يصبح هدف الشركة تعظيم العائد الاجمالي . وعلى ذلك تكون دالة الهدف كالاتي :-

$$\text{تعظيم} \qquad z = 10{,}000\,x_1 + 15{,}000\,x_2 + 20{,}000\,x_3$$

وتشتمل قيود المشكلة على :-

1- قيد على استخدام الارض .

2- قيد خاص بمتطلب سكن العائلة الواحدة مقارنة بالمساكن الاخرى .

3- قيد خاص بمتطلب المتنزهات .

4- المتطلبات الرأسمالية لتوصيل خدمة المياه .

5- قيد خاص بالاستهلاك اليومي للمياه في أوقات الذروة .

ويتم التعبير عن هذه القيود رياضيا كالاتي :

(1) استخدام الارض

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 \leq 680$$

(2) سكن لعائلة واحدة

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} \geq .5$$

أو

$$.5x_1 - .5x_2 - .5x_3 \geq 0$$

(3) المتنزهـــات

$$x_4 \geq \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{200}$$

أو $200x_4 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 0$

(4) رأس المال

$$1000x_1 + 1200x_2 + 1400x_3 + 800x_4 \geq 100{,}000$$

(5) إستهلاك الميـــاه

$$400x_1 + 600x_2 + 840x_3 + 450x_4 \leq 200{,}000$$

(6) شرط عدم السالبية

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

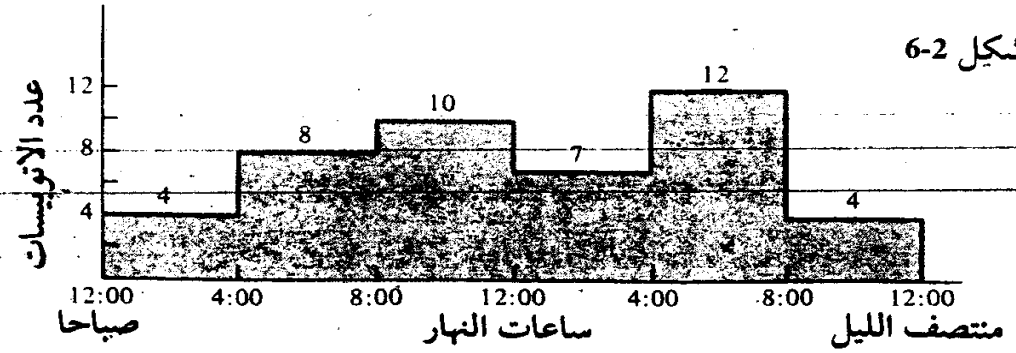
3-2 صياغات إضافية للبرمجة الخطية
ADDITIONAL "LP" FORMULATIONS

قدمنا في القسم 2-2 صياغتين للبرمجة الخطية كان من السهل فيهما تحديد متغيرات القرار وتحديد القيود ودالة الهدف. ونقدم في هذا الفصل ثلاث صياغات اضافية تحتاج إلى مهاره في تحديد المتغيرات واستخدامها في النموذج. والهدف من ذلك هو تعريف القارىء بافكار جديده في بناء النموذج.

مثال 2-3-1 (مشكلة جدولة مواعيد الاتوبيس)

تدرس إحدى المدن إمكانية إقامة نظام نقل جماعى عام بالاتوبيسات يمكن أن يخفف من مشكلة العادم والضجيج من خلال تقليل حركة السيارات داخل المدينة. وتحاول الدراسة المبدئية أن تحدد ادنى عدد من الاتوبيسات الذي يمكن أن يقوم بعملية النقل المطلوبة. وبعد تجميع المعلومات المطلوبة، لاحظ مهندسوا المدينة أن الحد الادنى من العدد المطلوب لعملية النقل يتغير على مدار اليوم. وبتجميع بيانات أكثر تبين أنه يمكن إفتراض ثبات العدد المطلوب من الاتوبيسات على مدار 4 ساعات متتالية (أي أن العدد يتغير كل 4 ساعات). ويلخص شكل 2-6 ما توصل إليه المهندسون. وقد تقرر تنفيذ الصيانة اليوميه المطلوب بحيث يستطيع كل اتوبيس أن يعمل 8 ساعات متتالية يوميا.

شكل 2-6

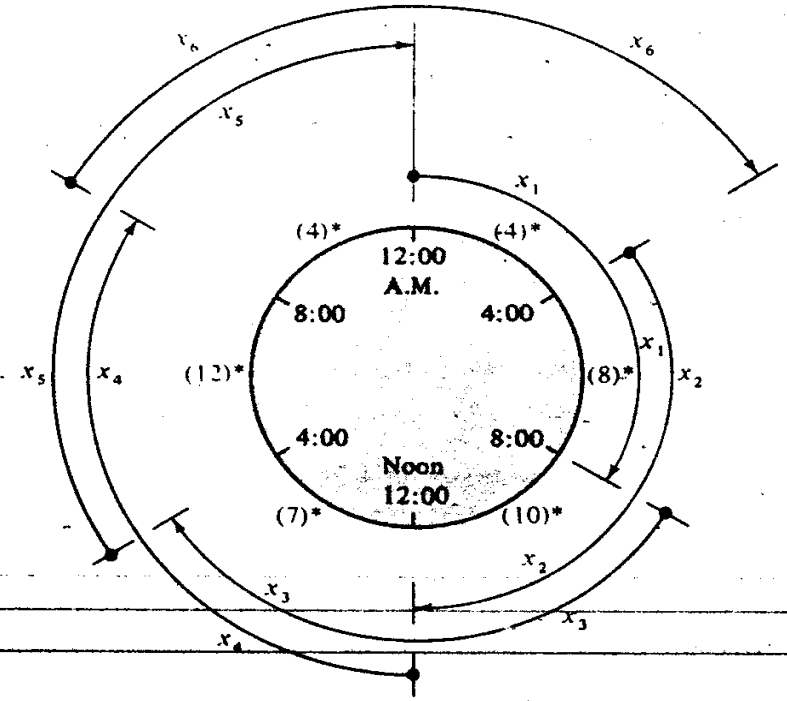


التمثيل الرياضي Mathematical Representation

المطلوب هو تحديد عدد الاتوبيسات التي ستستعمل على دوريات مختلفة (متغيرات القرار) بما يكفى لمقابلة الحد الادنى من الطلب (القيود) وبما يحقق ادنى عدد اجمالى من الاتوبيسات العاملة في اليوم (الهدف).

ولعلك تلاحظ أن تعريف المتغيرات غير واضح. فنحن نعلم أن كل اتوبيس سيعمل وردية 8 ساعات، ولكننا لانعلم متى ستبدأ هذه الوردية. فإذا تتبعنا جدول الورديات العادى الذي يشتمل على ثلاث دوريات (8:01 صباحا ـ 4:00 مساءا، 4:01 مساءا ـ 12:00 منتصف الليل، 12:01 – 8:00 صباحا) وبافتراض أن x_1 ، x_2 ، x_3 تمثل عدد الاتوبيسات التي ستبدأ في الوردية الاولى، الثانية، والثالثة، يمكننا أن نرى من شكل 6-2 أن $x_1 \geq 10$ ، $x_2 \geq 12$ ، $x_3 \geq 8$ ، ويعني ذلك أن أدنى عدد من الاتوبيسات $x_1 + x_2 + x_3 = 10 + 12 + 8 = 30$ اتوبيس يوميا.

ويعتبر هذا الحل مقبولا فقط إذا تطابقت الورديات مع الجدول العادي للورديات الثلاثة. وعلى أي حال، قد تكون هناك ميزة من السماح لنموذج الحل الأمثل أن يختار «أفضل» وقت لإبتداء الوردية. والطريقة المعقوله لتنفيذ ذلك هي السماح للوردية أن تبدأ كل 4 ساعات. ويشرح الشكل 2-7 هذا المفهوم حيث يمكن أن تبدأ الورديات



* تمثل الحد الادنى المطلوب لفترة 4 ساعات

شكل 2-7

(المشتركة في بعض الزمن) عند الساعة 12:01 صباحا، 4:01 صباحا، 8:01 صباحا، 12:01 مساءاً، 4:01 مساءاً، 8:01 مساءاً حيث تستمر كل وردية 8 ساعات متتالية. ويمكننا الآن أن نعرف المتغيرات.

x_1 = عدد الاتوبيسات التي ستبدأ الساعة 12:01 صباحا.
x_2 = عدد الاتوبيسات التي ستبدأ الساعة 4:01 صباحا.
x_3 = عدد الاتوبيسات التي ستبدأ الساعة 8:01 صباحا.
x_4 = عدد الاتوبيسات التي ستبدأ الساعة 12:01 مساءاً.
x_5 = عدد الاتوبيسات التي ستبدأ الساعة 4:01 مساءاً.
x_6 = عدد الاتوبيسات التي ستبدأ الساعة 8:01 مساءاً.

وبذلك يمكن كتابة النموذج الرياضي كالاتى (أنظر شكل 2-7):

المطلوب تدنية: $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

بشرط أن:

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_6 &\geq 4 && \text{(صباحا 4:00 ـ صباحا 12:01)}\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad &\geq 8 && \text{(صباحا 8:00 ـ صباحا 4:01)}\\
x_2 + x_3 \qquad\qquad &\geq 10 && \text{(ظهرا 12:00 ـ صباحا 8:01)}\\
x_3 + x_4 \qquad\qquad &\geq 7 && \text{(مساءا 4:00 ـ مساءا 12:01)}\\
x_4 + x_5 \qquad\qquad &\geq 12 && \text{(مساءا 8:01 ـ مساءا 4:01)}\\
x_5 + x_6 &\geq 4 && \text{(مساءا 12:00 ـ مساءا 8:01)}\\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

ستندهش إذا علمت أن لحل الامثل لهذا النموذج يتطلب استخدام 26 اتوبيسا فقط بحيث تبدأ 10 أتوبيسات الساعة 4:01 صباحا (x_2)، 12 أتوبيس الساعة 12:01 مساءا (x_4)، 4 أتوبيسات الساعة 8:01 مساءا (x_6) ولن تكون هناك ورديات تبدأ الساعة 12:01 صباحا، 8:01 صباحا، 4:01 مساءا (أي أن: $x_1 = x_3 = x_5 = 0$). لذلك، بالسماح للحل أن يختار زمن بداية كل وردية (بالمقارنة بجدول الورديات العادي) أمكن تخفيض عدد الاتوبيسات اليومي من 30 إلى 26.

تطبيق 2-3-1

(أ) ادرس تطبيق النموذج السابق على الحالات الآتية:
(1) عدد الممرضات في المستشفى.
(2) عدد ضباط الشرطه في المدينة.

(3) عدد العمال في مطعم يعمل 24 ساعة يوميا .
(4) عدد عمال التليفون في مركز التليفونات .

(ب) اذا كانت تكاليف تشغيل الاتوبيسات التي تبدأ بين 8:01 صباحا و 8:00 مساءاً تبلغ حوالى 80% من تكلفة تشغيل الاتوبيسات التي تبدأ بين 8:01 مساءاً و 8:00 صباحا، فكيف يمكن ادخال هذه المعلومات إلى النموذج؟

[الاجابة : غير دالة الهدف لتكون $z = .8(x_3 + x_4 + x_5) + (x_1 + x_2 + x_6)$ تدنية] .

مثال 2-3-2 (مشكلة خسارة قصاصات الورق) تنتج احدى شركات الورق انتاجها من لفات ورق بمقاس عرض نمطى 20 قدم للفه . وقد طلب أحد العملاء طلبية بمقاسات عرض مختلفة عن طريق شق اللفات النمطية . ويتضمن الجدول الآتي الطلبيات النمطية (والتي يمكن أن تتغير من يوم إلى يوم) :

الطلبية	مقاس العرض المطلوب (بالقدم)	عدد اللفات المطلوبة
1	5	150
2	7	200
3	9	300

وعمليا، يتم تنفيذ الطلبية من خلال ضبط سكاكين القطع على مقاسات العروض المطلوبة . ويوجد عدد من الطرق لتقطيع اللفه النمطية ذات مقاس عرض 20 قدم للوفاء بالطلبية المعينة . ويظهر شكل 2-8 ثلاثة أوضاع مختلفة لسكاكين القطع . وعلى الرغم من وجود طرق ضبط اخرى للسكاكين، فسوف نقصر المناقشة على الثلاثة طرق A ، B ، C في الشكل 2-8. يلاحظ أنه يمكن تجميع الطرق الثلاثة في عدد من الطرق للوفاء بالطلبيات بعرض 5 ، 7 ، 9 قدم . وفيما يلي مثالين عن هذا التجميع الممكن :

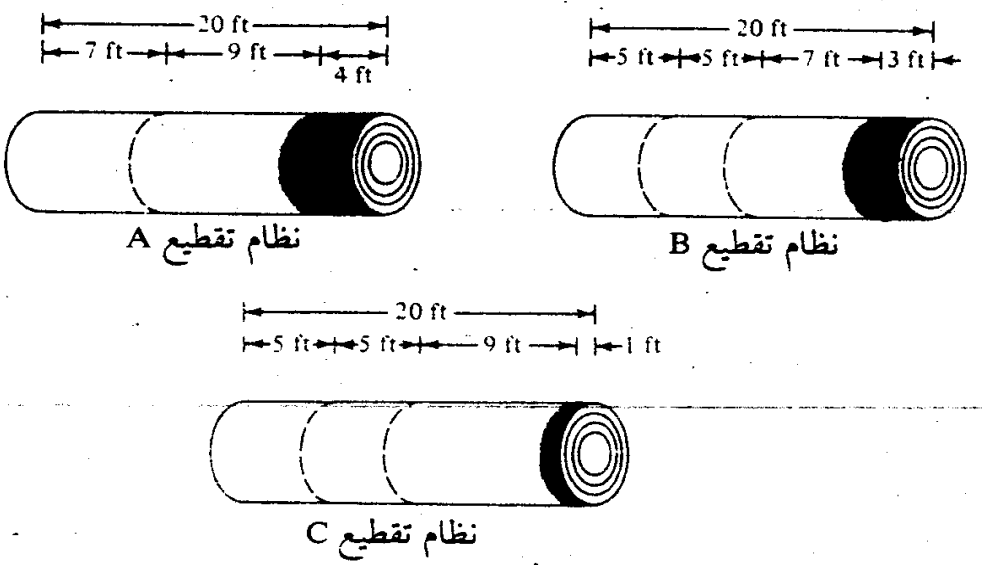
١ - قطع 300 لفه نمطية باستخدام الضبط A و 75 لفه بإستخدام الضبط B.
٢ - قطع 200 لفه نمطية باستخدام الضبط A و 100 لفه باستخدام الضبط C.

أي من التجميعين يعتبر أفضل؟ يمكننا الاجابة على هذا السؤال بالتركيز على القصاصات (الفاقد) التي ستخرج من كل نظام قطع . وتظهر الأجزاء المظلله في الشكل 2-8 الزيادات من اللفه التي ليست بالمقاس الكافي للوفاء بالطلبيات المطلوبة . هذه الزيادات هي مايطلق عليه "خسارة القصصات trim loss". وبذلك يمكننا تقييم أفضلية كل نظام قطع عن طريق احتساب خسارة القصاصات الناتجة منه . وعلى أى

حال، حيث أن مقاس هذه الزيادة يكون مختلفا، فيجب أن يقوم تقييمنا على مساحة القصاصات بدلا من عدد اللفات الزائده. ولذلك، بافتراض أن الطول النمطى للفه هو L قدم، اذن يمكننا احتساب مساحة القصاصات كالاتي (أنظر شكل 2-8):

تجميع 1 : $300\,(4 \times L) + 75\,(3 \times L) = 1425L$ | قدم مربع

تجميع 2 : $200\,(4 \times L) + 100\,(1 \times L) = 900L$ | قدم مربع



شكل 2 - 8

هذه المساحات الناتجة تتمثل في الاجزاء المظلله فقط في شكل 2-8. لاحظ أن أي زيادات عن الكميات المطلوبة من إنتاج اللفات 5 ، 7 ، 9 أقدام يجب أن تؤخذ في الاعتبار أيضا عند احتساب خسارة القصاصات. لذلك في التجميع 1 ، سيترتب على النظام A انتاج زائد قدره 100 لفه 7 قدم زيادة (200-300) ، كما ينتج النظام B 75 لفه 7 قدم زيادة. وبذلك ستكون هناك قصاصات اضافية مساحتها بالقدم المربع قدرها $175\,(7 \times L) = 1225L$. أما في التجميع 2 فلن يكون هناك انتاج زائد من اللفات 7 ، 9 قدم ولكن سيكون هناك انتاج زائد من اللفات 5 قدم في نظام C عددها 50 لفه (150-200) مع قصاصات مساحتها بالقدم المربع $50\,(5 \times L) = 50\,L$. ونتيجة لذلك يصبح لدينا:

$$\left(\begin{matrix}\text{مساحة خسارة القصاصات الكلية} \\ \text{للتجميع 1}\end{matrix}\right) = 1425L + 1225L = 1650L \text{ ft}^2$$

$$\left(\begin{matrix}\text{مساحة خسارة القصاصات الكلية} \\ \text{للتجميع 2}\end{matrix}\right) = 900L + 250L = 1150L \text{ ft}^2$$

وكما هو واضح أن التجميع 2 أفضل لانه يحقق مساحة خسارة قصاصات أقل من التجميع 1. ويلاحظ أن الحصول على حل أمثل لهذه المشكلة يتطلب بالضرورة تحديد كل نظم القطع الممكنة ثم حصر كل التجميعات الممكنة. وعلى الرغم من أمكانية تحديد كل نظم القطع، فقد لايكون في الامكان حصر كل التجميعات الممكنة. وبذلك توجد حاجه ماسه إلى وجود مدخل منظم للقيام بعملية الحصر. وهذا ماسيقوم به نموذج البرمجه الخطية.

التمثيل الرياضى

نحن نحاول تحديد تجميعات القطع (المتغيرات) التي ستفى بالطلبيات المطلوبة (القيود) بحيث يتم تدنية مساحة خسارة القصاصات إلى أدنى حد ممكن (الهدف).

ويلاحظ أنه يجب التعبير عن المتغيرات بطريقة مفهومة للمسئول عن التقطيع. وقد تم بناء التجميعين السابقين (1) ، (2) بحيث يتم تعريف المتغيرات على أنها عدد اللفات النمطية التي سيتم تقطيعها طبقا لنظام القطع المعين. ويتطلب ذلك التعريف تحديد كل نظم القطع كما يلخصها الجدول الآتي (لاحظ أن مقاس العرض النمطى للفه قبل تقطيعها = 20 قدم).

العدد الادنى من اللفات	نظام التقطيع						مقاس العرض المطلوب بالقدم
	6	5	4	3	2	1	
150	0	1	4	2	2	0	5
200	0	2	0	0	1	1	7
300	2	0	0	1	0	1	9
خسارة القصاصات في القدم الطولى	2	1	0	1	3	4	

ويلاحظ أن نظم التقطيع 1 ، 2 ، 3 معطاة في شكل 2-8 بالرموز A ، B ، C على التوالي. ويجب أن تقنع نفسك بصحة نظم القطع الاخرى وأنه لاتوجد طريقة اخرى غير هذه الطرق الستة. تذكر أن طريقة القطع المطلوبة لايجب أن تعطى خسارة قصاصات عرضها 5 قدم أو أكثر وإلا أصبحت صالحه لانتاج وحدات الطلبية الأولى ولم تعد من ضمن القصاصات. وللتعبير عن النموذج رياضيا أفترض :-

x_j = عدد اللفات النمطية التي سيتم تقطيعها وفقا لنظام القطع j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$.

وتتطلب قيود النموذج الوفاء بالحد الادنى من العدد المطلوب لكل طلبية. لذلك يمكن باستخدام نظم القطع المذكوره في الجدول السابق أن نحصل على:

عدد اللفات الواجب انتاجها بمقاس عرض 5 قدم $= 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5$
عدد اللفات الواجب انتاجها بمقاس عرض 7 قدم $= x_1 + x_2 + 2x_5$
عدد اللفات الواجب انتاجها بمقاس عرض 9 قدم $= x_1 + x_3 + 2x_6$

ويلاحظ أن هذه المعادلات تمثل العدد الفعلي الذي يجب انتاجه من الطلبيات الثلاثة والذي يجب أن يساوي 150 ، 200 ، 300 لفه على التوالى وهي تمثل كل قيود المشكلة.

ولتكوين دالة الهدف، افترض أن y_1 ، y_2 ، y_3 تمثل عدد اللفات الزائدة عن الكمية المطلوبة في الطلبيات 5 ، 7 ، 9 قدم على التوالي.
اذن:

$$y_1 = 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 - 150$$
$$y_2 = x_1 + x_2 + 2x_5 - 200$$
$$y_3 = x_1 + x_3 + 2x_6 - 300$$

وبذلك تصبح المعادلة العامة لقياس مجموع مساحة خسارة القصاصات كالاتي

$$L(4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 + 5y_1 + 7y_2 + 9y_3)\ \text{ft}^2$$

وحيث أن L التي تمثل طول اللفه النمطية تعتبر عامل مشترك في المعادلة، أذن يمكن قسمة كل المعادلة على L بدون التأثير على القيمة المثلى لدالة الهدف. وبناء عليه يمكن كتابه النموذج العام لهذه المشكلة كالاتي:

المطلوب تدنية

$$z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 + 5y_1 + 7y_2 + 9y_3$$

بشرط أن:

$$2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 - y_1 = 150 \quad \text{(5-ft rolls)}$$
$$x_1 + x_2 + 2x_5 - y_2 = 200 \quad \text{(7-ft rolls)}$$
$$x_1 + x_3 + 2x_6 - y_3 = 300 \quad \text{(9-ft rolls)}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6$$
$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

تطبيق 2-3-2

(أ) باستخدام جدول أوضاع سكينة التقطيع المعطى في المثال 2-3-2 قم بالتعبير عن كل من الحلول الممكنة الاتية في شكل x_j واحسب مساحة خسارة القصاصات في كل حالة:

(1) 200 لفه باستخدام نظام 1 و 100 لفه باستخدام نظام 3.
[الاجابة: $x_1 = 200$ ، $x_3 = 100$ ومساحة خسارة القصاصات = 1150 L قدم مربع]
(2) 50 لفه باستخدام نظام 2 و 75 لفه باستخدام نظام 5 و 150 لفه باستخدام نظام 6.
[الاجابة: $x_2 = 50$ ، $x_5 = 75$ ، $x_6 = 150$ ومساحة خسارة القصاصات = 650L قدم مربع].

(ب) أفترض أن المتاح هو لفات بمقاس نمطي عرض 15 قدم فقط. قم بتجميع كل نظم التقطيع الممكنة لانتاج لفات 5 ، 7 ، 9 قدم واحسب خسارة القصاصات الخاصة بكل نظام بالقدم الطولي.
[الاجابة: النظم (3,0,0) ، (0,2,0) ، (1,1,0) ، (1,0,1). وخسارة القصاصات بالقدم الطولي للاربعة نظم على التوالي 1,3,1,0)].

مثال 2-3-3 (برمجة الاهداف Goal Programming)

يلاحظ أن القيود في الامثلة السابقة تمثل علاقات لاتتغير، بمعنى أن ارتباط الجانب الأيمن بالجانب الايسر في كل قيد يأخذ أحد ثلاثة علاقات (1) $\leq$ ، (2) $\geq$ ، أو (3) $=$. وتوجد حلول عملية لبعض الحالات التي يمكن أن تكون لها ميزة معينة اذا تم تجاوز قيد مفروض مقابل تضحية معينة. فعلى سبيل المثال، عادة ما يوجد قيد الأموال المتاحة المحدودة في نموذج الشركة التي تفاضل بين الاستثمار في عدة مشروعات، ولكنها قد تفضل أن تتخطى هذا القيد من خلال إقتراض أموال اضافية. ولاشك أن هذا الاقتراض سيكون هناك مايقابله من تضحية وهي الفائدة المدفوعة على المبلغ المفترض. وعادة مايمكن تبرير القرض على أساس اقتصادي إذا كان المشروع الممول بالاقتراض مشروعا مربحا. هذا النوع من النماذج يطلق عليه «برمجة الاهداف» حيث يقوم النموذج رياضيا بتعديل مستوى بعض الموارد للوفاء بهدف متخذ القرار.

وسنشرح برمجة الأهداف بمثال مبسط. افترض أن منتجين يتم انتاجهما من خلال المرور على آلتين مختلفتين حيث يبلغ الوقت العادي المتاح للآلتين 8 ساعات يوميا يمكن زيادته 4 ساعات وقت إضافي مقابل تكلفة اضافية 5$ للساعة. ويظهر الجدول الآتي معدل الانتاج للمنتجين وهامش ربح كل منهما. والمطلوب تحديد مستوى الانتاج من كل منتج الذي سيجعل الأرباح اقصى ما يمكن.

معدل الانتاج (وحدة / ساعة)		
منتـــج 2	منتـــج 1	الآلـــة
6	5	1
8	4	2
\$4	\$6	هامش الربح للوحدة

التمثيل الرياضي

المطلوب تحديد عدد الوحدات من كل منتج (المتغيرات) التي تعظم الأرباح (الهدف) بشرط أن الحد الاقصى المسموح لساعات تشغيل الآلات لاتزيد عن الوقت العادي والوقت الاضافي (القيود).

افترض x_j = عدد وحدات المنتج j ، $j = 1, 2$

وفي حالة عدم وجود الوقت الاضافي، يمكن كتابة قيود النموذج كالاتي:

$$x_1/5 + x_2/6 \leq 8 \quad (\text{آلة } 1)$$
$$x_1/4 + x_2/8 \leq 8 \quad (\text{آلة } 2)$$

وبأخذ الوقت الاضافي في الاعتبار، يمكن اعادة كتابة القيود كالاتي:

$$x_1/5 + x_2/6 - y_1 = 8$$
$$x_1/4 + x_2/8 - y_2 = 8$$

حيث إشارة كل من y_1 ، y_2 غير محددة للسبب الاتي. إذا كانت y_i سالبه، فمعناة أن زمن التشغيل الفعلى يقل عن زمن التشغيل العادي 8 ساعات وبالتالي لاحاجة إلى الوقت الاضافي. أما إذا كانت y_i موجبه، فمعناة أن زمن التشغيل الفعلى يزيد عن زمن التشغيل العادي وتصبح y_i ممثله للوقت الاضافي.

وقد أخذنا الوقت الاضافي في الاعتبار من خلال ترك y_i تأخذ قيم غير محدده. وبعد ذلك المطلوب وضع قيد على استخدام الوقت الاضافي بحيث لايزيد عن 4 ساعات، كما يجب إدخال تكلفة الوقت الاضافي ضمن دالة الهدف. وحيث أن y_i ستكون موجبه فقط اذا استخدم الوقت الاضافي، فإن القيد الاتي

$$y_i \leq 4 \, , \, i = 1, 2$$

يمثل القيد المطلوب على استخدام الوقت الاضافي. لاحظ أن هذا القيد يصبح زائداً على النموذج عندما تكون $y_i < 0$ (أي لايوجد وقت إضافي).

والآن نأخذ في الاعتبار دالة الهدف. فهدفنا هو تعظيم الأرباح التي تساوى مجموع ربح المنتجين مطروحا منه التكلفة الاضافية للوقت الاضافي. ويمكن التعبير عن مجموع

الارباح مباشرة من خلال $6x_1 + 4x_2$. مع ملاحظة أن تكلفة الوقت الاضافي ستحقق فقط عندما تكون $y_i > 0$. لذلك أنسب طريقة للتعبير عن تكلفة الوقت الاضافي كالآتي :

تكلفة الوقت الاضافي = تكلفة الساعة × عدد ساعات الوقت الاضافي

$$5(\max[0, y_i]) =$$

لاحظ أن $\max[0, y_i] = 0$ عندما تكون $y_i < 0$ ، والتي تعطى تكلفة وقت اضافي = صفر كما هو مطلوب. وبناء على ذلك يمكن كتابة النموذج الكامل كالآتي :-

المطلوب تعظيم :

$$z = 6x_1 + 4x_2 - 5(\max[0, y_1] + \max[0, y_2])$$

بشرط أن :

$$\begin{aligned} x_1/5 + x_2/6 - y_1 &= 8 \\ x_1/4 + x_2/8 - y_2 &= 8 \\ y_1 &\le 4 \\ y_2 &\le 4 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

y_1, y_2 unrestricted in sign

ولتحويل النموذج إلى برمجية خطية نستخدم المتغير W_i حيث أن :

$$w_i = \max\{0, y_i\}$$

والذي يعني أن :

$$w_i \ge y_i \quad \text{and} \quad w_i \ge 0$$

ونظرا لأن المعامل السالب لـ W_i في دالة الهدف سيجبر النموذج على افتراض أصغر قيمة غير سالبة ممكنة : صفر أو y_i. اذن يمكن كتابه نموذج البرمجه الخطية كالآتي :

المطلوب تعظيم : $z = 6x_1 + 4x_2 - 5(w_1 + w_2)$

بشرط أن :

$$\begin{aligned} x_1/5 + x_2/6 - y_1 &= 8 \\ x_1/4 + x_2/8 - y_2 &= 8 \\ y_1 - w_1 &\le 0 \\ y_2 - w_2 &\le 0 \\ y_1 &\le 4 \\ y_2 &\le 4 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, w_1, w_2 \ge 0$$

حيث أن y_1, y_2 غير محدده الاشارة

تطبيق 2-3-3

(أ) افترض أن حلا ممكنا للنموذج في المثال 2-3-3 أعطى $y_1 = 2$ و $y_2 = -1$. فماذا يعني هذا من حيث استخدام الوقت العادي والوقت الاضافي؟
[الاجابة: الالة 1 ستستخدم 2 ساعة وقت اضافي والآلة 2 سيكون لديها 1 ساعة عاطلة من الوقت العادي].

(ب) في الجزء (أ)، احسب التكلفة الاضافية نتيجة لاستخدام الوقت الاضافي باستخدام دالة الهدف معبرا عنها بـ W_i.
[الاجابة: $y_1 = 2$ سوف تجعل $W_1 \geq 2$، وباستخدام خطوات الحل الامثل سنجد أن $W_1 = 2$ وقيمتها المرتبطة بها في دالة الهدف ستكون $10 - = 2 \times 5-$. وبالنسبة لـ $y_2 = -1$، فإن $W_2 \geq -1$، ولكن حيث أن $W_2 \geq 0$ كما عرفناها سابقا، فإن خطوات الحل الأمثل ستجبر W_2 لتكون صفر، مما يجعل قيمتها في دالة الهدف تساوي $0 = 0 \times 5-$].

ويجب الاشارة في نهاية هذا القسم إلى ضرورة أن تكون قيم بعض متغيرات النماذج التي قدمناها قيما عددية صحيحة. فعلى سبيل المثال، في مشكلة تصنيع الورق (مثال 2-3-2) يعبر المتغير عن عدد اللفات التي يجب تقطيعها وفقا لنظام التقطيع المعين. ويجب الاشارة إلى أن حلول البرمجة الخطية لاتضمن أن تكون قيم المتغيرات اعداداً صحيحة الا في حالات خاصة. ونتيجة لذلك، فإن العلاج الوحيد الممكن عند هذه النقطة هو تقريب الحل الامثل في حالة وجود كسور في أرقام الحل، مع ملاحظة أن عملية التقريب لاتصلح إلا في حالة وجود قيم مثلى كبيرة للمتغيرات حيث لن تكون عملية التقريب مؤثرة. أما إذا كانت قيم الحل صغيرة فلا تصلح عملية التقريب، لذلك سنقدم في الفصل الثامن طرقا خاصة لحل نماذج البرمجه العددية.

4-2 نموذج البرمجة الخطية وتوزيع الموارد
THE LP MODEL AND RESOURCE ALLOCATION

يمكن استخدام البرمجة الخطيه في حل مشاكل التخصيص حيث يكون المطلوب تخصيص موارد محدوده على عدد من الأنشطة الاقتصادية. ولتفسير هذه النقطة سنكتب نموذج البرمجه الخطيه كالآتي:

المطلوب تعظيم: $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

بشرط أن:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

وتحاول البرمجه الخطية من وجهة النظر الاقتصادية أن تحقق أفضل تخصيص للموارد المحدودة على انشطة اقتصادية محدده. ففي النموذج العام للبرمجه الخطيه يوجد عدد n من الانشطة التي يتم تمثيل مستوياتها (ذات قيم غير معلومة) بالمتغيرات x_1 ، x_2 ، . . . . . ، x_n. ويوجد أيضا عدد m من الموارد التي يبلغ الحد الاقصى المتاح منها القيم b_1 ، b_2 ، . . . . . ، b_m. وتستهلك كل وحدة نشاط j المقدار a_{ij} من المورد i. ويعنى هذا ان الكمية $\Sigma^{n}_{j=1} a_{ij} x_j$ تمثل الاستخدام الكلي لكل الانشطة n من المورد i بحيث لايزيد هذا الاستخدام عن b_i.

وتمثل دالة الهدف $\Sigma^{n}_{j=1} c_j x_j$ مقياس مساهمة الانشطة المختلفة حيث تعرف c_j على أنها هامش ربح الوحدة من النشاط j في حالة التعظيم، وتعرف على أنها تكلفة الوحدة في حالة التدنية. ويلاحظ أنه لايمكن الحكم على القيمة التي يحققها النشاط المعين باستخدام معامل الهدف c_j فقط بل يجب الاخذ في الاعتبار أيضا عامل مهم وهو استهلاك هذا النشاط من الموارد المحدوده. ونظرا لأن كل الأنشطة تتنافس فيما بينها على الموارد المحدوده، فستتوقف المساهمة النسبية للنشاط المعين (مقارنة بالانشطة الاخرى) على كل من معامل الهدف الخاص به c_j وعلى استهلاكه من الموارد a_{ij}. لذلك، قد يبقى المتغير ذي هامش الربح المرتفع للوحده عند القيمة صفر (أي لايتم اختياره في الحل) بسبب استخدامه المفرط للموارد المتاحة.

5-2 ملخص SUMMARY

تعرف البرمجة الخطية على أنها نموذج تخصيص موارد يحاول التخصيص الامثل للموارد المحدوده على عدد من الانشطة المتنافسه على هذه الموارد. وتطبق البرمجة الخطية بنجاح ملحوظ على الكثير من المشاكل العملية المتنوعة. وتتحدد صلاحية الحل البياني للبرمجة الخطية بالمشاكل ذات المتغيرين فقط. وعلى أي حال، تظهر الطريقة البيانية نتيجة هامة وهي أن حل مشاكل البرمجة الخطية يستلزم بالضرورة الاخذ في الاعتبار النقاط عند اركان منطقة الحلول الممكنة فقط. وتعتبر هذه النقطة هي الاساس الذي تعتمد عليه طريقة السمبلكس والتي تعتبر إجراء رياضي جبرى صمم لحل المشكلة العامة للبرمجه الخطية.

ويجب النظر إلى تحليل الحساسية على أنه جزء مكمل لحل أي مشكلة حلاً أمثلاً. فهو يعطى خاصية الحركية لحلول البرمجه الخطية والتي تعتبر ضرورية لاتخاذ قرارات صحيحة في بيئة اتخاذ قرارات كثيرة التغير.

مراجع مختارة

BAZARAA, M., and J. JARVIS, *Linear Programming and Network Flows*, Wiley, New York, 1977.

DANTZIG, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

MURTY, KATTA, *Linear Programming*, Wiley, New York, 1983.

أسئلـة للمراجعـة:

حدد ما اذا كانت العبارات التالية صحيحة (ص) أو خاطئة (خ):

1 - لاتكون خاصية التناسبية في البرمجة الخطية متوافره إذا إعتمدت مساهمة الوحدة من المتغير المعين في دالة الهدف على قيمة هذا المتغير.

2 - يمكن أن يؤدي إحلال = محل ≤ أو ≥ في قيود نموذج البرمجة الخطية إلى تحسين قيمة دالة الهدف.

3 - يمكن أن يؤدي إحلال = محل ≥ في القيد إلى إيجاد منطقة حلول ممكنة أكثر تحديدا.

4 - يمكن جعل القيد من النوع ≥ أكثر تحديدا من خلال انقاص القيمه الثابتة على الجانب الايمن.

5 - يمكن أن تشتمل منطقة حلول ممكنة مع قيدين بعلامة (=) على نقطة حل ممكن واحده على الاكثر بشرط أن لايتطابق الخطان (بمعنى أن المعادلتين مستقلتان).

6 - يمكن أن تشتمل منطقة حلول ممكنه مع قيدين بعلامة (=) على عدد لانهائي من النقاط الممكنة بشرط تطابق الخطان على بعض (أي أن المعادلتين ليستا مستقلتان).

7 - يمكن دائما تحديد حل البرمجه الخطية الامثل، عندما يكون نهائيا، من خلال معرفه كل نقاط اركان منطقة الحلول الممكنة.

8 - يمكن افتراض أن دالة الهدف لحل برمجه خطية ذات قيدين تأخذ نفس القيمة عند ركنين متميزين في منطقة الحلول الممكنة.

9 - يمكن أن تتـأثر منطقة الحلول الممكنة في نموذج البرمجه الخطية عندما يتم حذف

القيود الزائدة .

10 – يمكن أن تتغير منطقة الحلول الممكنة في نموذج البرمجه الخطية عندما يتم حذف القيود غير المحددة .

11 – يمكن أن يتغير الحل الامثل في نموذج البرمجه الخطية عندما يتم حذف القيود غير المحددة .

12 – القيود الزائدة تمثل موارد وافره .

13 – سوف يؤثر التغير في كمية المورد النادر بالتأكيد على القيم المثلى لكل من دالة الهدف والمتغيرات .

14 – ينتج عن التغير في معاملات دالة الهدف تغير في القيم المثلى للمتغيرات .

15 – يمكن أن يؤدي التغير في معاملات دالة الهدف إلى تغير حالة المورد من وافر إلى نادر أو العكس .

16 – يمكن أن تكون متغيرات نموذج البرمجه الخطية غير مجددة الاشارة في الحياة العملية .

17 – في نموذج البرمجه الخطية المتغير الذي يمثل النشاط الذي يحقق أكبر هامش ربح للوحدة في دالة الهدف سوف يظهر دائما بقيمة موجبة في الحل الامثل .

18 – يمكن تحويل النشاط غير الاساسي (الذي لايظهر في الحل الامثل) في نموذج البرمجه الخطية إلى نشاط مربح من خلال انقاص استهلاكه من الموارد المحدودة .

[الاجابة : 1 - ص، 2 - خ، 3 - ص، 4 - خ، 5 - ص، 6 - ص، 7 - ص، 8 - ص، 9 - خ، 10 - ص، 11 - خ، 12 - خ، 13 - ص، 14 - خ، 15 - ص، 16 - ص، 17 - خ، 18 - ص] .

تمارين

القسم	التمارين الخاصه به
1-1-2	1-2 إلى 19-2
2-1-2	20-2 إلى 25-2
2-2 ، 3-2	26-2 إلى 36-2

1-2 ينتج أحد مصانع الاثاث طاولات وكراسى حيث يحتاج تجميع الطاولة إلى 2 ساعة ويحتاج تجميع الكرسي إلى 30 دقيقة . ويقوم بعملية التنفيذ 4 عمال على أساس وردية واحدة 8 ساعات يوميا . وعادة مايشترى العميل 4 كراسي على الاقل مع كل طاولة ، مما يعني أنه يجب على المصنع أن ينتج عدد من الكراسي يزيد 4 مرات على الاقل

عن عدد الطاولات. ويبلغ سعر بيع الطاولة 150$ وسعر بيع الكرسي 50$. والمطلوب تحديد تشكيلة الانتاج المثلى من الطاولات والكراسي التي تحقق أقصى ايراد يومي ممكن. مع التعليق على دلالة الحل الذي تم التوصل اليه.

2-2 يمتلك مزارع 200 بقره تستهلك 90 كيلو من غذاء خاص يوميا. ويتم اعداد هذا الغذاء من خليط من الذره ومن الفول الصويا بالمكونات الاتية:

نوع الحبوب	المستخرج بالكيلو من كل كيلو حبوب			التكلفة (دولار / كيلو)
	كالسيوم	بروتين	أليـاف	
ذره	.001	.09	.02	.20
فول صويا	.002	.60	.06	.60

وتستلزم المتطلبات الغذائية أن يشتمل الغذاء اليومي للبقره على:

1- 1% على الاكثر كالسيوم.
2- 30% على الاقل بروتين.
3- 5% على الاكثر أليـاف.

والمطلوب: تحديد خلطة الغذاء اليومية التي تحقق ادنى تكلفة ممكنة.

3-2 يخصص بنك صغير مبلغ 20,000$ كحد أقصى للقروض الشخصية ولقروض السيارات أثناء الشهر القادم ويحمل البنك هذه القروض بفائده سنوية 14% للقروض الشخصية و 12% لقروض السيارات. ويجب تسديد القروض على مدار فترة 3 سنوات. ويجب أن يكون مقدار قروض السيارات ضعف القروض الشخصية على الاقل. وتظهر الخبره السابقة أن الديون المعدومه تعادل 1% من كل الديون الشخصية. فكيف يجب أن يخصص البنك امواله.

4-2 تعاقدت شركة معلبات على شراء 6000 كيلو من الطماطم الطازجة بسعر 15 سنت للكيلو لإستخدامها في انتاج معلبات عصير وصلصة الطماطم. ويتم تعبئة المعلبات في صناديق بمعدل 24 علبه للصندوق. ويتطلب انتاج علبة العصير 1 كيلو من الطماطم بينما يتطلب انتاج علبه الصلصه $\frac{1}{3}$ كيلو طماطم فقط. ولا يستوعب السوق أكثر من 2000 صندوق عصير و 6000 صندوق من الصلصه. ويبلغ سعر بيع صندوق العصير 40$ وسعر بيع صندوق الصلصه 20$. والمطلوب تحديد جدول الانتاج الامثل لهذه الشركة.

5-2 يقوم مصنع للراديوهات بتجميع نوعين من الراديو A ، B على نفس خط التجميع الذي يتكون من 3 مراحل ويتضمن الجدول الاتي وقت التجميع في المراحل الثلاث.

المرحلة	دقائق للوحدة	
	A	B
1	6	4
2	5	5
3	4	6

وتبلغ طاقة التشغيل في كل مرحلة 480 دقيقة في اليوم. وتحتاج المرحلة الى صيانة يومية تستغرق 10% ، 14% ، 12% من الـ 480 دقيقة المتاحة يوميا للمراحل 1 ، 2 ، 3 على التوالي. وترغب الشركة في تحديد الانتاج اليومي من كلا النوعين الذي يجعل زمن العطل في المراحل الثلاثة أقل ما يمكن.

6-2 تنتج احدى شركات الاليكترونات نوعين من الراديو كل على خط انتاج منفصل حيث تبلغ طاقة الخط الاول 60 راديو في اليوم وطاقة الخط الثاني 75 راديو في اليوم. وتستخدم الوحده من النوع الاول 10 قطع من جذء اليكتروني معين، في حين تحتاج الوحده من النوع الثاني الى 8 قطع. وتبلغ الكمية المتاحة من هذا الجزء 800 قطعة يوميا على الأكثر. ويبلغ ربح الوحدة من النوع الاول والثاني 30$ ، 20$ على التوالي. والمطلوب تحديد حجم الانتاج الأمثل اليومي من كل نوع.

7-2 يمر انتاج نوعين من المنتجات على 3 آلات حيث تبلغ الطاقة المتاحة لكل آلة 10 ساعات يوميا. ويلخص الجدول الاتي زمن الانتاج وربح الوحدة من كل نوع من المنتجات:

المنتج	دقيقة للوحده			الربح
	آلة 1	آلة 2	آلة 3	
1	10	6	8	$2
2	5	20	15	$3

والمطلوب تحديد خطة الانتاج المثلى من كل منتج.

8-2 يمكن أن تعلق الشركة عن انتاجها من خلال الراديو أو التليفزيون حيث خصصت ميزانية اعلان 1000$ في الشهر. وتتكلف دقيقة الاعلان 5$ ، 100$ في الراديو والتلفزيون على التوالي. وترغب الشركة في استخدام الراديو ضعف استخدام التلفزيون على الاقل. وتظهر الخبرة السابقة أن الدقيقة اعلان في التلفزيون تحقق مبيعات تعادل 25 مرة من المبيعات التي تحققها الدقيقة اعلان في الراديو. فما هو التخصيص الامثل لميزانية الاعلان على الراديو والتليفزيون.

9-2 تنتج إحدى الشركات منتجين B,A حيث يبلغ حجم المبيعات من A 60% على الاقل من مجموع مبيعات A ، B معا. ويستخدم كل من المنتجين نفس المادة الخام حيث يبلغ المتاح منها يوميا 100 كيلو كحد أقصى. ويحتاج انتاج الوحدة 2 كيلو، 4 كيلو من المادة الخام للمنتج A ، B على التوالي. ويبلغ سعر البيع 20$ ، 40$ للوحدة من A ، B على التوالي. والمطلوب تحديد التخصيص الامثل للمادة الخام على المنتجين.

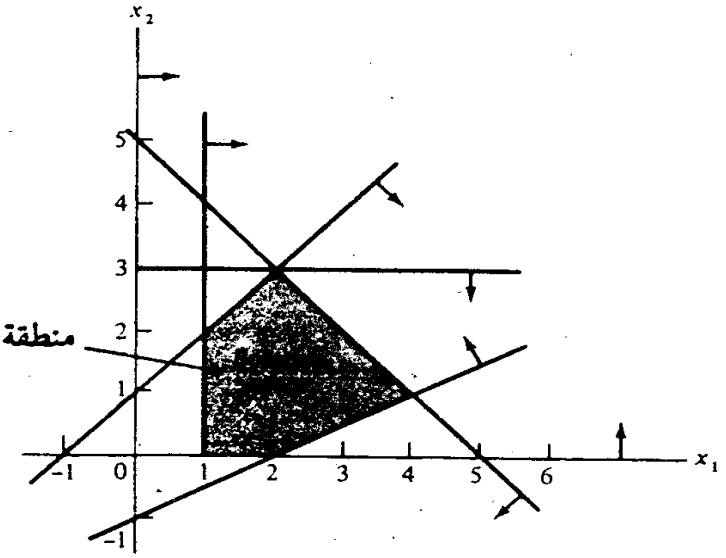
10-2 تنتج احدى الشركات نوعين من السلع A ، B حيث يحتاج انتاج الوحدة من النوع A إلى زمن عمل يعادل ضعف الزمن المطلوب للوحدة من النوع B. فاذا تخصصت الشركة في انتاج النوع B فقط يمكنها انتاج 500 وحده يوميا. ولا يستوعب السوق أكثر من 150 ، 200 وحده يوميا من النوع A ، B على التوالي. ويبلغ هامش ربح الوحدة من النوع A 8$ ومن النوع B 5$. فما هي خطة الانتاج التي تحقق أقصى ربح ممكن.

11-2 حدد بيانيا منطقة الحلول الممكنة لغير المتساويات الاتية:

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$-x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ماهي القيود الزائدة؟ إختصر النموذج إلى أقل عدد من القيود الذي سيحدد نفس منطقة الحلول الممكنة.

12-2 اكتب القيود التي تحدد منطقة الحلول الممكنة الظاهرة في الشكل الاتي مع تحديد القيود الزائدة.



13-2 اليك المشكلة الاتيـة :

المطلوب تعظيم : $z = 6x_1 - 2x_2$

بشرط أن :

$$x_1 - x_2 \le 1$$
$$3x_1 - x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

وضح بيانيا أنه يمكن أن تزيد قيمة x_1 ، x_2 إلى مالانهاية عند الحل الامثل مع بقاء قيمة دالة الهدف ثابتة .

14-2 اليك مشكل البرمجة الخطية الاتيـة :

المطلوب تعظيم : $z = 4x_1 + 4x_2$

بشرط أن :

$$2x_1 + 7x_2 \le 21$$
$$7x_1 + 2x_2 \le 49$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

اوجد الحل الامثل (x^*_1 ، x^*_2) بيانيا . ماهو المدى الذي يمكن أن تتغير فيه معاملات دالة الهدف مع الاحتفاظ بـ (x^*_1 ، x^*_2) كحل أمثل؟

15-2 حل المشكلة الاتية بيانيا .

المطلوب تعظيم : $z = 5x_1 + 6x_2$

بشرط أن:

$$x_1 - 2x_2 \geq 2$$
$$-2x_1 + 3x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \text{ unrestricted in sign}$$

16-2 اليك المشكلة الاتية:

المطلوب تعظيم: $z = 3x_1 + 2x_2$

بشرط أن:

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

وضح بيانيا أنه لايوجد للمشكلة اركان لحل ممكن. ماذا يمكن استنتاجه بخصوص حل المشكلة؟

17-2 حل المشكلة الاتيـة بيانيا.

المطلوب تعظيم: $z = 5x_1 + 2x_2$

بشرط أن:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 = 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

18-2 حدد رقميا فى المشكلة 17-2 اركـان منطقة الحلول الممكنة. واذا تم تغيير القيد $x_1 = 5$ إلى $x_1 \leq 5$ قم بتحديد كل اركان الحلول الممكنة ثم حدد الحل الامثل من خلال تقييم دالـة الهـدف رقميا عنـد كل ركن. بين أن الاجابة تتفق مع الحل البياني. أعد الاجراءات مع تغيير $x_1 = 5$ إلى $x_1 \geq 5$.

19-2 بالرجوع إلى منطقة الحلول الممكنة في تمرين 12-2، قم بتحديد الحل الامثل بافتراض أن دالة الهدف:

(a) Minimize $z = 2x_1 + 6x_2$. المطلوب تدنية
(b) Maximize $z = -3x_1 + 4x_2$. المطلوب تدنية
(c) Minimize $z = 3x_1 + 4x_2$. المطلوب تدنية
(d) Minimize $z = x_1 - 2x_2$. المطلوب تدنية
(e) Minimize $z = x_1$.
(f) Maximize $z = x_1$. المطلوب تعظيم

20-2 اليك مشكلة البرمجة الخطية الاتية:

المطلوب تعظيم $z = 5x_1 + 3x_2$

بشرط أن :

$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad \text{(مورد 1)}$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad \text{(مورد 2)}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

قم بتحديد الاتي :

أ ـ مقدار الزيادة في المورد 1 التي ستجعل قيده زائداً، وماهو مقدار التغير في قيمة z نتيجة لذلك .

ب ـ مقدار النقص في المورد 2 الذي سيجعل القيد 1 زائداً، وماهو مقدار التغير في قيمة z نتيجة لذلك .

21-2 اظهر الحل الامثل في تمرين 2-6 أن القيود المرتبطة بالكمية المتاحة من الجزء الاليكتروني وطاقة انتاج خط 1 كانت نادرة بينما كان قيد خط انتاج 2 زائداً .

أ ـ حدد أقصى زيادة في طاقة الخط 1 والتي لن تتحسن بعدها قيمة دالة الهدف .

ب ـ حدد أقصى نقص في طاقة الخط 2 والتي ستترك الحل الامثل الحالى بدون تغيير.

جـ ـ حدد أقصى زيادة في المتاح يوميا من الجزء الاليكتروني والتي لن تتحسن بعدها قيمة دالة الهدف .

د ـ حدد المورد النادر الذي يجب أن يعطى الاولوية الاولى في الزيادة بناء على قيمة الوحدة من المورد .

22-2 بالعودة إلى تمرين 2-7 حيث تستخدم ثلاث الات في انتاج منتجين .

أ ـ حدد الآله أو الالات ذات الطاقة الوافرة عند الحل الامثل ، تم حدد مقدار الطاقة غير المستغله (بالساعات) .

ب ـ حدد قيمة الساعة للالات التي استغلت استغلالا كاملا .

جـ ـ أى من الالات الثلاث التي يجب أن تعطى الأولوية الاولى لزيادة طاقتها .

23-2 بالعودة الى تمرين 2-8 حدد أقصى زيادة في الموازنة الشهرية والتي لن يتأثر بعدها الحل الأمثل . حلل النتائج من وجهة نظر تنفيذ هذه الموازنة في الحياة العملية .

24-2 بالعودة إلى تمرين 2-6 حيث تطلب الحل الامثل انتاج 60 راديو من النوع الاول و 25 راديو من النوع الثاني مع تحقيق ربح أمثل 2300$.

أ ـ حدد المدى الذي يمكن أن يتغير فيه ربح الوحده من النوع الاول دون تغيير الحل الامثل الحالي .

ب ـ أعد جزء (أ) بالنسبة للنوع الثاني من الراديوهات .

جـ ـ بافتراض ثبات ربح الوحده من النوع الثاني عند 2$ ، قم بتحديد ربح الوحده من

النوع الاول التي يمكن أن ينتج عنها حلا أمثلا يصبح فيه كل من القيدين الممثلين لطاقات خطى الانتاج غير محددين.

د - افترض تغير ربح النوع الاول والنوع الثاني في وقت واحد. قمم بتحديد مدى نسبة معاملى ربح المنتجين التي لن تغير من الحل الامثل الحالي.

2-25 بالرجوع إلى تمرين 2-8، قم بتحديد الزيادة في مبيعات الشركة نتيجة لدقيقة اعلان واحده في الراديو التي ستجعل الشركة تتجه إلى إنفاق الميزانية بالكامل على الاعلان في الراديو دون التليفزيون.

2-26 يتم إنتاج 4 منتجات بصورة متتابعة على آلتين. ويظهر الجدول الاتي زمن انتاج الوحده على كل آلة.

	زمن الوحده بالساعة			
آلة	منتج 1	منتج 2	منتج 3	منتج 4
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

وتعتمد التكلفة الكلية لانتاج الوحدة من كل منتج بصورة مباشرة على زمن الآلة. وبافتراض أن تكلفة عمل الساعة للالتين 1، 2 تبلغ 10$، 15$ على التوالي، وأن الطاقة المخصصه للانتاج على الالتين 1، 2 بلغت 500، 380 ساعة عمل آلة على التوالى. وأن سعر بيع الوحده من المنتجات 1، 2، 3، 4 يبلغ 65$، 70$، 55$، 45$ على التوالي. والمطلوب صياغة المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية لتحقيق أقصى ربح ممكن.

2-27 تقوم احدى الشركات الصناعية بانتاج ثلاثة أصناف (I، II، III) من منتج معين تستخدم نوعين من المواد الخام (A، B) متاح منهما 4000، 6000 وحده على التوالي. ويلخص الجدول الاتى متطلبات وحدة المنتج من المواد الخام.

	متطلبات الوحده من كل صنف		
المادة الخام	I	II	III
A	2	3	5
B	4	2	7

ويبلغ زمن انتاج الوحدة من الصنف I ضعف زمن انتاج الوحدة من الصنف II

وثلاثة أمثال زمن انتاج الوحدة من الصنف III. ويمكن لكل قوة العمل في المصنع أن تنتج مايعادل 1500 وحدة من الصنف I. وتشير دراسات السوق الى أن الطلب المتوقع كحد ادنى على الاصناف الثلاثة I ، II ، III يبلغ 200 ، 200 ، 150 وحدة على التوالي. وعلى أى حال، يجب أن تكون نسبة عدد الوحدات المنتجة 5:2:3. وبافتراض أن ربح الوحدة من كل صنف I ، II ، III يبلغ $30 ، $20 ، $50 على التوالي. والمطلوب : صياغة المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية لتحديد عدد الوحدات الواجب انتاجها من كل صنف بما يحقق أقصى ربح ممكن.

28-2 يوجد لدى أحد المديرين التنفيذين خطتين استثماريتين A و B. وتضمن الخطة A تحقيق 70 سنت في السنة على كل دولار يتم استثماره، في حين تضمن الخطة B تحقيق $2 بعد سنتين عن كل دولار يتم استثماره. ولايسمح في الخطة B الا بالاستثمار في فترات تكون 2-سنة أو مضاعفاتها. فكيف يجب أن يستثمر [illegible] غ $100,000 لتعظيم العائد بعد 3 سنوات؟ قم بصياغة المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية.

29-2 افترض أن الحد الادنى لعدد الاتوبيسات المطلوبة عند الساعة i في اليوم هو b_i حيث $i = 1,2,3, \ldots\ldots 24$ وأن كل اتوبيس يعمل 6 ساعات متتالية. فاذا زاد عدد الاتوبيسات في الفترة i عن الحد الادنى المطلوب b_i ، فستكون هناك زيادة في التكاليف c_i لكل ساعة اتوبيس. قم بصياغة المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية لتدنية مجموع الزيادة في التكاليف.

30-2 يلخص الجدول الاتي البيانات المطلوبة لتخصيص 3 طائرات على 4 مسارات :

نوع الطائرة	طاقة طائرة (راكب)	عدد الطائرات	عدد الرحلات اليومية للمسار 1	2	3	4
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
		عدد المسافرين يوميا	100	200	90	120

وتبلغ التكاليف الخاصة بهذه الرحلات كالاتي :

نوع الطائرة	تكلفة تشغيل الرحلة على المسار المعين ($)			
	1	2	3	4
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	1000	1000
3	600	800	800	900
تكلفة الفرصه الضائعه عن كل مسافر لايجد مكاناً	40	50	45	70

المطلوب: صياغة المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية.

2-31 في مشكلة تصنيع الورق في قسم 2-3-2، بين أنه يمكن التعبير عن دالة الهدف في شكل أكثر بساطة كالآتي:

المطلوب تدنية: $z = 20(x_1 + x_2 + \cdots + x_6)$

2-32 يتم انتاج نوعين من السبائك المعدنية A، B من أربعة معادن I، II، III، IV وفقا للمواصفات الاتية:

السبيكه	المواصفات
A	80 % على الأكثر من المعدن I
	30 % على الأكثر من المعدن II
	50 % على الأقل من المعدن IV
B	مابين 40 % و 60 % من المعدن II
	30 % على الأقل من المعدن III
	70 % على الاكثر من المعدن IV

ويتم استخلاص المعادن الاربعة من ثلاثة خامات مختلفة كالاتي:

الخامه	أقصى كمية (بالطن)	مكونات الخام من المعادن (٪)					سعر (طن/$)
		I	II	III	IV	أخرى	
1	1000	20	10	30	30	10	30
2	2000	10	20	30	30	10	40
3	3000	5	5	70	20	0	50

وبافتراض أن سعر البيع للسبيكة A، B يبلغ $200، $300 للطن على التوالي. والمطلوب

صياغة المشكلة في شكل نموذج برمجه خطية .
[مساعدة : إفترض أن X_{ijk} تمثل الأطنان من المعدن i المتحصل عليه من الخامة j والمستخدم في استخلاص السبيكة k].

34-2 تنتج احدى الشركات الصناعية منتجا نهائيا يتم تجميعه من ثلاثة اجزاء مختلفة . ويتم انتاج هذه الاجزاء الثلاثة داخل الشركة في قسمين مختلفين . ونظرا لاختلاف عملية إعداد الالات في كل من القسمين فإن لكل منهما معدل إنتاج مختلف للثلاثة اجزاء . ويتضمن الجدول الآتي معدلات الإنتاج مع أقصى عدد من الساعات الاسبوعية المتاحة للانتاج في القسمين . وقد يكون مثاليا أن يستطيع القسمان أن يعدلا من تجهيزاتهما بحيث تتساوى معدلات انتاجهما من الأجزاء الثلاثة ، وبذلك سيكون هناك تقابل تام عند عملية التجميع النهائي . إلا أنه قد يكون من الصعب تحقيق هذا الهدف بسبب التغيرات في معدلات الانتاج . ولذلك يمكن أن يكون الهدف الاكثر واقعية هو تعظيم عدد الوحدات النهائية التي يتم تجميعها والذي بالضرورة يتطلب تدنية الاختلافات في انتاج الاجزاء الناتجة من النقص في جزء أو أكثر . والمطلوب صياغة المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية .

القسم	أقصى طاقة اسبوعية (بالساعة)	معدل الانتاج (وحدات/ ساعة)		
		قسم 1	قسم 2	قسم 3
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

35-2 يمكننا في مثال 2-3-3 استخدام ما يلي ليحل محل المتغير y_i الذي لم يتحدد نوع اشارته :

$$y_i = y_i' - y_i''$$

حيث y_i' ، y_i'' متغيرات غير سالبه . ومن خصائص هذا الإحلال أنه عندما تكون $y_i' > 0$ فإن $y_i'' = 0$ ، وعندما تكون $y_i'' > 0$ فإن $y_i' = 0$. لذلك يمكننا أن نفكر في y_i' على أنها المقدار غير المستغل من المورد . وفي هذه الحاله فإن y_i'' ستمثل مقدار الزيادة عن المتاح حاليا للمورد المعين . بين كيف يمكن تنفيذ احلال هذه المتغيرات في مثال 2-3-3.

حالات قصيرة:

حالة 2-1: تنتج احدى الشركات ثلاثة أنواع معلبات مستخلصة من البرتقال : عصير مركز، عصير عادي ، ومربى في علب سعتها 5 جالون لاغراض الاستخدام التجارى . وتصنع المربى من برتقال درجة I بينما يصنع العصير باستخدام برتقال درجة II. ويتضمن الجدول الاتي قائمة باستخدامات البرتقال بالاضافة إلى الطلب في العام القادم .

المنتج	درجة البرتقال	كمية البرتقال بالكيلو لكل علبة 5 جالون	الحد الأقصى للطلب (علب)
مربى	I	5	10,000
مركز	II	30	12,000
عصير	II	15	40,000

ويظهر مسح السوق أن الطلب على العصير العادي يكون ضغف الطلب على العصير المركز على الاقل . وقد تعودت الشركة في الماضى على شراء البرتقال درجة I بصفة مستقلة عن البرتقال درجة II بسعر 25 سنت، 20 سنت للكيلو على التوالي . وقد أدت الثلوج هذا العام إلى اضطرار المزارعين إلى حصاد البرتقال وبيع المحصول مبكرا قبل فرزة إلى درجة I و درجة II. وقد تم تقدير أن 30% من محصول كميته 3,000,000 كيلو ستكون درجة I و 60% فقط ستكون درجة II. ولهذا السبب يعرض المحصول هذا العام بسعر موحد 19 سنت للكيلو. وقد قدرت الشركة أنها ستتكلف حوالى 2.15 سنت لفرز كل كيلو من البرتقال إلى برتقال درجة I وبرتقال درجة II. أما البرتقال الباقي 10% فيتم التخلص منه باعتباره غير مطابق للمواصفات .

ويرى قسم المحاسبة الرأى التالي عند تخصيص التكاليف لاغراض احتساب تكلفة الكيلو من البرتقال درجة I والبرتقال درجة II: حيث أن 10% من المحصول المشترى ستكون أقل من المواصفات، أذن تصبح التكلفة المتوسطة الفعلية (بالسنتات) لكل كيلو برتقال سيتم استخدامه كالاتي 23.5 = .9 / (2.15 + 19). والآن، حيث أن نسبة البرتقال درجة I الى البرتقال درجة II في الكمية المشتراه هي 1:2 ، اذن تصبح التكلفة المتوسطة المقابله لها لكل كيلو بناء على الاسعار القديمه (بالسنتات) : 21.67 = 3/ (1 x 25 + 2 x 20). ولذلك يجب تخصيص الزيادة في السعر المتوسط (1.83 = 21.67 – 23.5) على النوعين من البرتقال بنفسى النسبة 1:2 مما يجعل تكلفة الكيلو من البرتقال درجة I = 25.61 = (1/3) 1.83 + 25 وتكلفة الكيلو من البرتقال درجة II = 20. 21.22 = (2/3) 1.83 + وقد أعد قسم المحاسبة بناء على هذه المعلومات قائمة الربحية

الاتية للمنتجات الثلاثة. والمطلوب: تحديد خطة الانتاج المثلى لهذه الشركة بناء على المعلومات المعطاه.

	الانتاج (علبه 5 جالون)		
	مربى	مركز	عصير
سعر البيع	$15.50	$30.25	$20.75
تكاليف متغيرة	9.85	21.05	13.28
مصاريف صناعية ثابتة مخصصة	1.05	2.15	1.96
تكلفة كلية	$10.90	$23.20	$15.24
صافي ربح	4.60	7.05	5.51

حالـه 2-2: تمتلك احدى الشركات الصناعية مسبك بالإضافة إلى 2 مصنع سك معادن. ويقوم المسبك بسبك ثلاثة أنواع من لفات الصلب التي يتم تجهيزها في الورش قبل أن تشحن إلى مصنعى السك اللذين يقومان باستخدام هذه اللفات المجهزة في إنتاج انواع مختلفة من المنتجات.

ويقوم مصنعى السك بتحديد احتياجاتهما الشهرية من لفات الصلب في بداية كل ربع سنة ويسلمها إلى المسبك الذي يقوم مديره بعمل خطه للانتاج تأخذ في الاعتبار الطاقة الآلية لورش التجهيز. وإذا ظهر نقص يتم تدبيره من الشراء المباشر من الخارج بسعر أعلى. ويظهر الجدول الآتي مقارنة بين اسعار التصنيع الداخلي واسعار الشراء من الخارج. وعلى أي حال، أوضح المدير أن هذا النقص غير متكرر ويمكن توقع حدوثه بنسبة 5% من الوقت.

نوع اللفه	الوزن (بالرطل)	تكلفة داخلية (دولار/ لفه)	سعر الشراء من الخارج (دولار/ لفه)
1	800	90	108
2	1200	130	145
3	1650	180	194

ويبلغ زمن التشغيل للاربعة ماكينات المختلفة الموجودة في الورشة كما في الجدول الآتي:

نوع الآله	زمن التشغيل / لفه			عدد الآلات	الساعات المتاحة للآله في الشهر
	لفه 1	لفه 2	لفه 3		
1	1	5	7	10	320
2	0	4	6	8	310
3	6	3	0	9	300
4	3	6	9	5	310

ويبلغ طلب المصنعين على اللفات خلال الثلاثة شهور القادمة كالاتي:

الشهر	الطلب بعدد اللفات					
	مصنع 1			مصنع 2		
	لفه 1	لفه 2	لفه 3	لفه 1	لفه 2	لفه 3
1	50	20	40	20	10	0
2	0	30	50	30	20	20
3	10	0	30	0	40	20

والمطلوب: وضع جدول الانتاج الأمثل لورشة تصنيع اللفات.