بحوث العمليات فى المحاسبة

دكتور
سعيد محمود الهلباوى

الناشر : المؤلف ١٩٩٤

جامعة طنطا
كلية التجارة

بحوث العمليات في المحاسبة

دكتور
سعيد محمود الهلباوى
أستاذ مساعد بقسم التكاليف

١٩٩٤

تحليل الحساسية وحدود أمثلية الحل
SENSITIVITY ANALYSIS AND THE LIMITS OF THE SOLUTION

نبذة عن طبيعة تحليل الحساسية

يعتبر تحليل الحساسية استمرار لتحليل العلاقة بين الحل الأمثل للمشكلة الأصلية والحل الأمثل للمشكلة المقابلة Primal and Dual Relationships at the Optimal Solution.

فهو من التحليلات التى يتم القيام بها بعد الوصول الى الحل الأمثل، ولذلك فإن تحليل الحساسية ينتمى الى ما يمكن أن نسميه دراسات ما بعد الأمثلية Post-Optimality Studies.

فهذا التحليل قد بدأناه من قبل عند دراسة أثراضافة ساعة اضافية لطاقة الأقسام الانتاجية على قيمة دالة الهدف. وفى هذا الجزء نحاول أن نواصل هذا النوع من التحليل عن طريق دراسة أثر اضافة

أو استبعاد كمية الموارد التى تظهر فى الطرف الأيسر من القيود، والمنهج الأساسى هو أن نحاول ايجاد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه قيم الطرف الأيسر من القيود دون أن تتأثر أمثلية الحل أى يظل الحل أمثل Right-Hand-Side Ranging.

وكذلك سنحاول فى هذا الجزء أن ندرس أثر التغيرات في معاملات دالة الهدف على أمثلية الحل، Changes in Objective Function Coefficients. وسيكون ذلك أيضا عن طريق ايجاد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه معاملات دالة الهدف دون أن تتأثرأمثلية الحل The Current Optimal Solution Remain Optimal.

والأساس فى تحليل الحساسية أننا نقوم بدراسة أثر كل تغير فى قيم ثوابت النموذج على حدة For One Variable at a Time وافتراض ثبات المعلمات الاخرى فى النموذج. فدراسة التغيرات تتم على أساس فردى لتحديد الى أى مدى يمكن أن تتغير بعض هذه الثوابت ويظل الحل الذى توصلنا اليه حل أمثل.

أولاً: دراسة أثر التغير فى قيم الطرف الأيسر للقيود التى يتضمنها النموذج.

لكى نتناول هذا التحليل، دعنا نستعيد المثال الذى عرضناه فى الفصل السابق والذى عرضنا لجدول السمبلكس الخاص بحل المشكلة الأصلية ص ~~ص~~ ولعله من المفيد أن نعرض هنا تابلوه الحل الأمثل مرة اخرى كما يلى:

تابلوه الحل الأمثل

صف اختبار مثالية الحل		٠	٤	٣	معاملات دالة الهدف
	متغيرات الأساس	$ك_2$	$ك_4$	$ك_3$	
١٢ =	$ك_1$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	٢
٠	$ك_4$	٠	١	٠	٤
٠	$ك_3$	٠	٠	١	٣
$\frac{5}{12}$	$ك_4$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	٠
$\frac{1}{12}$	$ك_5$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$	٠
٠	$ك_2$	٠	٠	١	٠
$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	

فلقد رأينا أن اضافه وحدة واحدة الى ساعات الطاقة فى قسم التجميع [القسم الأول] من ٦٠ ساعة الى ٦١ ساعة، سيترتب عليه زيادة فائض المساهمة بمقدار ٦/٥ جنيه. بينما إذا أضفنا ساعة واحدة الى ساعات الطاقة فى القسم الثانى [قسم التشطيب] من ٤٠ ساعة الى ٤١ ساعة سيترتب عليه زيادة فائض المساهمة بمقدار ٣/٢ جنيه. وبالنسبة لقسم التغليف [القسم الثالث] فإننا إذا أضفنا ساعة واحدة الى ساعات القسم [من ٨٠ ساعة الى ٨١ ساعة] فلن يتغير فائض المساهمة الاجمالى حيث أن سعر الظل لساعات الطاقة فى هذا القسم تساوى صفر.

والسؤال الهام هنا هو:

الى أى مدى يمكن زيادة طاقة الأقسام وتظل أسعار الظل كما هى بدون تغيير؟

فنحن لا نستطيع اضافة ساعات فى قسم التجميع أو فى قسم التشطيب الى ما لانهاية. وتظل أسعار الظل بدون تعديل.

وبفرض أننا نرغب فى معرفة عدد الساعات التى يمكن اضافتها أو استبعادها من طاقة قسم التجميع وتظل أسعار الظل كما هى بدون تعديل.

ويتمثل الاجراء الأساسى اللازم لتحديد مدى أمثلية القيود التى تكون على صورة أقل من أو يساوى [≤]. والمدى هو الذى يفى بالشروط الآتية التى يتم وضعها على الصورة العامة الآتية:

$$\begin{bmatrix} ب_{1} \\ ب_{2} \\ \vdots \\ ب_{م} \end{bmatrix} + \Delta ب_{1} \begin{bmatrix} أ_{1ن} \\ أ_{2ن} \\ \vdots \\ أ_{من} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} صفر \\ صفر \\ \vdots \\ صفر \end{bmatrix}$$

عمود النتائج فى تابلوه الحل الأمثل

عمود متغير الطاقة العاطلة الخاص بالقيد [ن] لتحليل حساسية الطرف الأيسر له.

ملحوظة:

واضح أن الاشارة [+ Δ ب١] ستصبح [- Δ ب١] فى حالة ما إذا كان القيد على صورة أكبر من أو يساوى [≥] ونستخدم هنا عمود متغير الفائض Surplus Variable، هذا على أساس أننا استخدمنا فى القيود التى تكون على صورة أقل من أو يساوى [≤] عمود متغير الطاقة العاطلة أو متغير القصور Slack Variable.

وبتطبيق ذلك على القيد الأول [قيد قسم التجميع] ونحاول تطبيق الشروط السابق الاشارة اليها لتحديد المدى الذى يمكن أن يتذبذب فيه الطرف الأيسر لهذا القيد وذلك على الصورة الآتية:

$$\begin{bmatrix} س_2 \\ س_3 \\ س_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣/٢٠ \\ ٣/٥٠ \\ ٣/٨٠ \end{bmatrix} + \Delta ب_1 \begin{bmatrix} ٣/١ \\ ٦/١- \\ ٣/٢- \end{bmatrix}$$

ويمكن أن نحدد مجموعة الشروط الآتية:

$$٣/٢٠ + ٣/١ \text{ ب}_1 \geqslant \text{صفر}$$

$$٣/٥٠ - ٦/١ \text{ ب}_1 \geqslant \text{صفر}$$

$$٣/٨٠ - ٣/٢ \text{ ب}_1 \geqslant \text{صفر}$$

وعلى ذلك يمكن تعديل هذه الشروط كما يلى:

$$\text{ب}_1 \geqslant -٣/٢٠ \div ٣/١ \geqslant -٢٠$$

$$\text{ب}_1 \geqslant ٣/٥٠ \div ٦/١ \geqslant ١٠٠$$

$$\text{ب}_1 \geqslant ٣/٨٠ \div ٣/٢ \geqslant ٤٠$$

وعلى أساس أننا يجب أن نفى بجميع المتباينات، ولذلك فإن القيمة الأكثر تقييدا لـ ب١ هى التى يجب أن نأخذها فى الاعتبار. والنتيجة يمكن أن نلخصها فى الصيغة الآتية:

$$-٢٠ \leq ب_1 \leq ٤٠$$

وعلى أساس أن قيمة الطرف الأيسر لهذا القيد هي ٦٠، فإننا يمكننا أن نحدد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه ساعات طاقة قسم التجميع كالآتى:

- الحد الأدنى = [٦٠ - ٢٠] أى ٤٠ ساعة
- الحد الأقصى = [٦٠ + ٤٠] أى ١٠٠ ساعة

طريقة مباشرة لتحليل حساسية الطرف الأيسر للقيد:

يمكن أن نصل الى نفس تحليل الحساسية للطرف الأيسر لقيد قسم التجميع بطريقة مباشرة تعتمد على اجراء مماثل لإجراء احلال صف فى تابلوهات السمبلكس كمايلى:

نحدد عمود النتائج وكذلك عمود متغير الطاقة العاطلة المرتبط بالقيد المطلوب تحليل حساسية الطرف الأيسر له، ثم نحدد خوارج قسمة الأول على الثانى كمايلى:

عمود النتائج		عمود متغير الطاقة العاطلة [س٤]	
٣/٢٠	÷	٣/١	= ٢٠
٣/٥٠	÷	٦/١-	= -١٠٠
٣/٨٠	÷	٣/٢-	= -٤٠

[١] أقل قيمة موجبة: هى اجابة عن السؤال:
كم ساعة يمكن تخفيض طاقة قسم التجميع بها وتظل أسعار الظل كما هى؟ وعلى ذلك فإننا يمكننا تخفيض ساعات الطاقة فى قسم التجميع بمقدار ٢٠ ساعة بدون أى تغيير على أسعار الظل.

[٢] أقل قيمة سالبة: هى اجابة عن السؤال التالى:
كم ساعة يمكن زيادتها الى طاقة قسم التجميع وتظل أسعار الظل كما هى؟ وعلى ذلك فإننا يمكننا زيادة ساعات طاقة قسم التجميع بمقدار ٤٠ ساعة وتظل أسعار الظل كما هى بدون أى تغيير.

وعلى ذلك فإن المدى الذى يمكن أن تتغير فيه ساعات طاقة قسم التجميع يتراوح بين:

الحد الأدنى = [٦٠ - ٢٠] أى ٤٠ ساعة
الحد الأقصى = [٦٠ + ٤٠] أى ١٠٠ ساعة

وبتطبيق نفس الأساس [الطريقة المباشرة] على قسم التشطيب لتحليل حساسية الطرف الأيسر للقيد الثانى:

عمود النتائج		عمود متغير الطاقة العاطلة [س٥]	
٣/٢٠	÷	-٣/١	= -٢٠
٣/٥٠	÷	٣/٢	= ٢٥
٣/٨٠	÷	-٣/١	= -٨٠

وعلى ذلك فإننا يمكننا تخفيض ساعات الطاقة الخاصة بقسم التشطيب بمقدار ٢٥ ساعة ، ويمكن أيضا زيادة ساعات الطاقة لقسم التشطيب بمقدار ٢٠ ساعة وذلك دون أن تتغير أسعار الظل.

وعلى ذلك يكون المدى الذى يمكن أن تتغير فيه ساعات طاقة قسم التشطيب ويظل الحل الحلى أمثل:

الحد الأدنى = ٤٠ - ٢٥ = ١٥ ساعة

الحد الأقصى = ٤٠ + ٢٠ = ٦٠ ساعة

ولكن ماذا بالنسبة لقيد قسم التغليف؟

الأمر مختلف هنا الى حد ما، حيث أن ساعات طاقة هذا القسم لم تستخدم بالكامل [ساعات غير مستخدمة س٦ = ٣/٨٠ ساعة]. وهذا يعنى أننا يمكننا تخفيض طاقة القسم بمقدار ٣/٨٠ ساعة حتى يمكن أن يحدث نقص أو ندرة فى ساعات هذا القسم. وعلى العكس فإننا يمكننا زيادة طاقة القسم بصورة غير محددة بدون تغيير الحل وأسعار الظل [سعر الظل = صفر].

ولذلك فإن حدود التغيير الذى يمكن أن تحدث لساعات الطاقة فى قسم التغليف بدون تغيير للحل الأمثل وأسعار الظل يمكن تحديدها كما يلى:

الحد الأدنى = ٤٠ — ٣/٨٠ = ٣/١٦٠ ساعة

الحد الأقصى = ٤٠ + بدون حد معين

أى أن مدى التغيير سيكون بين [٣/١٦٠] الى أى حد ممكن [∞].

ثانيا: دراسة أثر التغييرات فى معاملات دالة الهدف

CHANGES IN OBJECTIVE FUNCTION COEFFICIENTS

فى مجال تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف يجب أن نفرق بين معاملات دالة الهدف للمتغيرات خارج الحل (أى المتغيرات التى لاتكون من متغيرات الأساس) وبين معاملات دالة الهدف للمتغيرات التى تكون داخل الحل (أى المتغيرات التى تكون من متغيرات الأساس).

[أ] بالنسبة للمتغيرات خارج الحل

Variables that are not in the Solution

إذا رجعنا الى المثال الذى بين أيدينا، سنجد أن المتغير [س١] لا يوجد ضمن متغيرات الأساس فى الحل الأمثل [س١ = صفر]. وهذا يعنى أن فائض المساهمة للوحدة [٢ جنيه] ليس أكبر من أو حتى يساوى تكلفة احلال المتغير س١ محل المتغيرات الاخرى التى توجد ضمن متغيرات الأساس. فلكى يتم ادخال وحدة واحدة من المتغير س١ فيجب أن نضحى بـ ٣/١ وحدة من س٢ ، ٦/٥ وحدة من س٣ ، ـ ٣/٥ وحدة من س٦.

وبذلك فإن تكلفة ادخال وحدة واحدة من س١ ضمن الحل الأمثل = ٤×[٣/١] + ٣×[٦/٥] + صفر×[-٦/٥] = [٦/٨] + [٦/١٥] = ٦/٢٣

وبمقارنتها بفائض المساهمة الخاص بالوحدة من س١ = ٢. فإنه يمكننا أن نستنتج أن فائض المساهمة يجب أن يزيد بمقدار [٦/٢٣] - ٢ = ٦/١١ وذلك حتى يتغير الحل ويمكن ادخال [س١] ضمن متغيرات الحل الأمثل.

[ب] بالنسبة للمتغيرات داخل الحل

Variables that are already in the Solution

بافتراض أن المنشأة تريد أن تعرف ما إذا كان فائض المساهمة للمتغير [س٢] يمكن أن يزيد أو يقل وبأي قدر يمكن أن يكون ذلك قبل أن يتغير الحل الأمثل.

وسيكون ذلك بإفتراض أن معامل دالة الهدف للمتغير الأساسي س٢ سيساوى [أ١]. وسنستعين بتابلوه الحل الأمثل المبين بالصفحة التالية لتسهيل عملية اشتقاق الشروط الواجب أن نحددها ونحن فى سبيل تحديد المدى الخاص بمعامل دالة لهدف للمتغير س٢ [نقصد أ١].

ويمكن لنا الآن اشتقاق العلاقات الآتية:

$$\text{١/٣ [أ١]} + \text{١/٢} \leqslant \text{صفر} \quad \ldots [١]$$

$$\text{١/٣ [أ١]} - \text{١/٢} \leqslant \text{صفر} \quad \ldots [٢]$$

$$-\ \text{١/٣ [أ١]} + ٢ \leqslant \text{صفر} \quad \ldots [٣]$$

تابعه الى الأعلى : اختبار حساسية معامل دالة الهدف للمتغير $س_3$

معاملة دالة الهدف	$م_1$	٠	٢	
متغيرات الأساس		$س_2$	$س_3$	صف اختبار مقالية الحل
$س_1$	٢	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]$ ← (١)
$س_3$	١	٠	١	٠
$س_4$	٠	$\frac{1}{2}$	٠	٠
$س_5$	٠	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]$ ← (٢)
$س_6$	٠	١	٠	٠
معدل التغير		$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$٥+\frac{1}{2}$ ن

← (٣)

من العلاقة رقم [١]:

أ١ ≥ ٢/١ - ٣/١ ÷

أ١ ≥ ٣/٢ -

من العلاقة رقم [٢]:

أ١ ≥ ٢/١ ÷ ٣/١

أ١ ≥ ٣/٢

من العلاقة رقم [٣]:

أ١ ≥ ٢ ÷ ٣/١

أ١ ≥ ٦

وعلى ذلك فإن المدى الذى يمكن أن يتغير فيه معامل دالة الهدف للمتغير س٢ سيتحدد كما يلى:

٢/٣ ≥ أ١ ≥ ٦

أى أن:

الحد الأدنى: ٢/٣

الحد الأقصى: ٦

ويمكن تكرار نفس الاجراء لأغراض تحليل حساسية معامل دالة الهدف للمتغير [س٣]. ويبين جدول السمبلكس [تابلوه الحل الأمثل] الأساس المستخدم فى اشتقاق مجموعة العلاقات التى سوف نستخدمها فى تحديد المدى الذى يمكن أن يتغير فيه معامل دالة الهدف للمتغير [س٣].

•

ويمكن لنا الآن اشتقاق العلاقات الآتية:

$$\frac{6}{5}\,[أ_2] - \frac{3}{2} \leqslant \text{صفر} \quad \ldots [1]$$

$$\frac{3}{4} - \frac{6}{1}\,[أ_2] \leqslant \text{صفر} \quad \ldots [2]$$

$$-\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\,[أ_2] \leqslant \text{صفر} \quad \ldots [3]$$

من العلاقة رقم [١]:

$$أ_2 \leqslant \frac{3}{2} \div \frac{6}{5}$$

$$أ_2 \leqslant \frac{5}{4}$$

من العلاقة رقم [٢]:

$$أ_2 \geqslant \frac{3}{4} \div \frac{6}{1}$$

$$أ_2 \geqslant 8$$

تابعه الحل الأمثل : اختبار حساسية معامل دالة الهدف للمتغير س٣

معاملات دالة الهدف			
متغيرات الأساس			
صفف اختبار مقابلة الحل			

من العلاقة رقم [٣]:

$$\text{أ}_2 \leqslant \frac{3}{4} \div \frac{3}{2}$$

$$\text{أ}_1 \leqslant 2$$

وعلى ذلك فإن المدى الذى يمكن أن يتغير فيه معامل دالة الهدف للمتغير س٣ سيتحدد كما يلى:

$$2 \leqslant \text{أ}_2 \leqslant 8$$

أى أن:

الحد الأدنى: ٢

الحد الأقصى: ٨

ويمكن اجراء تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف بصورة مباشرة كما يلى:

[أ] بالنسبة لمعامل دالة الهدف للمتغير س٢

ناخذ الصف الخاص بالمتغير س٢ فى تابلوه الحل الأمثل وكذلك صف اختبار مثالية الحل.

ونقسم كل رقم فى صف اختبار مثالية الحل على الرقم المقابل فى الصف الخاص بالمتغير الذى ندرس مدى حساسية معامل دالة الهدف له، وذلك بالنسبة لأعمدة المتغيرات التى توجد خارج الحل الأمثل كما يلى:

	$س_1$	$س_4$	$س_5$
صف اختبار مثالية الحل:	$11/6$	$5/2$	$4/3$
صف المتغير [س٢]:	$1/3$	$1/3$	$-1/3$
خارج القسمة:	$33/6$	$15/6$	(-٢)

[*] أقل قيمة سالبة [- ٢] تشير الى مقدار الزيادة فى فائض المساهمة للوحدة من [س٢] بدون تغيير الحل الأمثل.

[*] أقل قيمة موجبة [٦/١٥] تشير الى مقدار النقص فى فائض المساهمة للوحدة من [س٢] بدون تغيير فى الحل الأمثل.

وعلى ذلك فإن:

الحد الأقصى = ٤ + ٢ = ٦ جنيه

الحد الأدنى = ٤ - [٦/١٥] =

= ٤ - ٢/٥ = ٢/٣ جنيه

وعلى ذلك يكون المدى الذى يمكن أن يتغير فيه معامل دالة الهدف للمتغير س٢ بإستخدام الصيغة الآتية:

٢/٣ ≤ أ١ ≤ ٦

ويمكن أن نعيد الأمر بالنسبة للمتغير س٣ كما يلى:

	$\frac{س_1}{}$	$\frac{س_4}{}$	$\frac{س_5}{}$
صف اختبارمثاليةالحل:	٦/١١	٦/٥	٣/٢
صف المتغير [س٣]:	٦/٥	-٦/١	٣/٢
خارج القسمة:	١١/٥	(-٥)	(١)

[*] أقل قيمة سالبة [- ٥] تشير الى مقدار الزيادة فى فائض المساهمة للوحدة من [س٣] بدون تغيير الحل الأمثل.

[*] أقل قيمة موجبة [+١] تشير الى مقدار النقص فى فائض المساهمة للوحدة من [س٣] بدون تغيير فى الحل الأمثل.